

ФУНКЦІЯ ГРІНА ТРИВИМІРНОГО КОНВЕКТИВНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПРЯМОГО ПОРОЖНИННОГО ЦИЛІНДРА

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Green's function of the three-dimensional convective Helmholtz equation for an infinite straight hollow cylinder of arbitrary (but constant along its length) cross-sectional shape and area, having either acoustically rigid or acoustically soft walls or the walls of a mixed type, is obtained. This function is represented by a series of the cylinder acoustic modes. In the function, the effects of a uniform mean flow in the cylinder are directly reflected. The effects become more significant as the flow Mach number increases, causing, in particular, the appearance and further growth of the function asymmetry about the cylinder cross-section in which the acoustic source is located. And vice versa, the decrease of the Mach number results in the decrease of the effects and, in particular, the decrease of the indicated function asymmetry. In the case of flow absence, the obtained Green's function is symmetric about the noted cross-section.

ВСТУП

Задачі знаходження й дослідження згенерованих у порожнинних циліндрах акустичних полів є актуальними для автомобіле- та літакобудування, нафтогазової промисловості, медицини, архітектури, комунального господарства, тощо. Всі вони, незалежно від типу й геометрії циліндричних конструкцій, а також типу акустичних джерел у них, в принципі можуть бути розв'язані методом функцій Гріна. Однак застосування цього методу є доцільним лише за умови існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна.

Така можливість, окрім кваліфікації дослідника, залежить від геометрії досліджуваної конструкції та форми її поперечного перерізу, фізичних властивостей її стінок та умов її закріплення, фізичних властивості зовнішнього та внутрішнього середовища, акустичних умов на кінцях конструкції, наявності або відсутності течії в ній тощо. Як засвідчує аналіз літератури, з-поміж циліндричних конструкцій, геометрія та фізичні властивості яких визначаються різними комбінаціями цих факторів, донедавна найбільш дослідженими були нескінченні прямі жорсткостінні порожнинні циліндри кругової та прямокутної форм поперечного перерізу [1]. Для них були побудовані відповідні функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца, а також з їхньою допомогою були одержані вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами. Проте всі ці результати зазвичай обмежувалися випадком відсутності внутрішньої течії. Якщо ж наявність течії і бралася до уваги, то її ефекти у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявлялися лише у неявному вигляді.

Цей недолік був частково виправлений у роботах [2,3]. Там були побудовані функції Гріна тривимірного хвильового рівняння для прямих порожнинних циліндрів різних форм поперечного перерізу (включаючи й довільну) з різноманітним типом стінок та внутрішньою рівномірною осередненою течією, а також функції Гріна тривимірного рівняння Гельмгольца для прямого жорсткостінного циліндра кругового і прямокутного

поперечного перерізу з такою ж течією. У цих функціях, окрім іншого, вже у явному вигляді були відображені ефекти зазначеної течії.

У даному дослідженні далі розвиваються й узагальнюються результати робіт [2,3] для тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого порожнинного циліндра довільної (але незмінної по його довжині) форми та площі поперечного перерізу з акустично жорсткими, або акустично м'якими стінками, або ж зі стінками змішаного типу. Одержані при цьому результати мають явну залежність від параметрів течії в циліндрі.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На рис. 1 зображено нерухомий нескінченний прямий порожнинний циліндр довільної (але незмінної по його довжині) форми та площі поперечного перерізу. Його стінки є акустично жорсткими або акустично м'якими, або ж якась їх частина є акустично жорсткою, а решта – акустично м'якою.¹ (Тут мається на увазі така форма поперечного перерізу циліндра і такий тип його стінок, для яких можна знайти його акустичні моди.). У цьому циліндрі задано рівномірну осереднену по його поперечному перерізу течію рідини зі швидкістю U в напрямку твірної його стінки², а також як завгодно розташовані нерухомі акустичні джерела різної природи. Останні генерують в циліндрі акустичне поле. Довільна частотна компонента цього поля описується тривимірним конвективним рівнянням Гельмгольца [2]:

$$\nabla^2 \tilde{p}_a + k_0^2 \tilde{p}_a + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial x_3} - M^2 \frac{\partial^2 \tilde{p}_a}{\partial x_3^2} = \tilde{\gamma}, \quad (x_1, x_2) \in A, \quad |x_3| < \infty. \quad (1)$$

Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для цього циліндра.

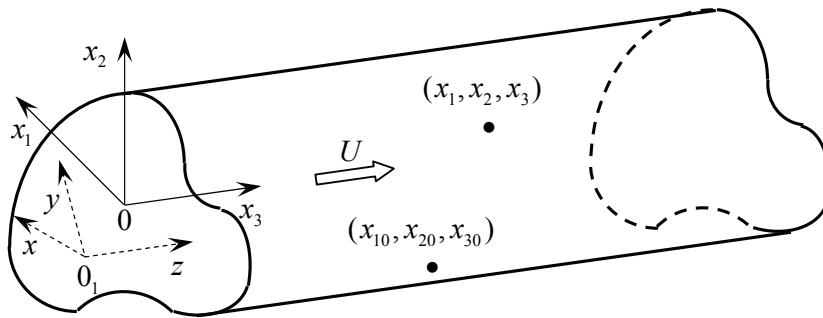


Рис. 1

У рівнянні (1) \tilde{p}_a є частотним образом Фур'є акустичного тиску p_a ; $k_0 = \omega / c_0$ – акустичним хвильовим числом; $i = \sqrt{-1}$ – комплексною одиницею; $M = U / c_0$ – числом Маха течії; $\tilde{\gamma}$ – частотним образом Фур'є функції γ , котра описує сумарний розподіл зазначених акустичних джерел; ω – коловою частотою; c_0 – швидкістю звуку в незбуреній рідині; x_1, x_2, x_3 – вибраними на рис. 1 ортогональними, у загальному випадку

¹ Тут мається на увазі така форма поперечного перерізу циліндра і такий тип його стінок, для яких можна знайти його акустичні моди.

² У даній роботі розглядаються такі швидкості руху рідини, при яких коливання стінок циліндра (у разі їх існування) будуть малими (щоб зберегти лінійність задачі).

криволінійними координатами з віссю x_3 уздовж течії; A – поперечним перерізом циліндра площею $|A|$; ∇^2 – оператором Лапласа, який у системі координат (x_1, x_2, x_3) записується наступним чином:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right]; \quad (2)$$

h_i ($i = 1, 2, 3$) – коефіцієнтами Ляме [3]:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2}, \quad h_1 = h_1(x_1, x_2), \quad h_2 = h_2(x_1, x_2), \quad h_3 = 1; \quad (3)$$

а x, y, z – прямокутними декартовими координатами, вибраними таким чином, що [3] їх початок лежить у тому ж поперечному перерізі циліндра, що і початок системи координат (x_1, x_2, x_3) , а вісь z співнаправлена з віссю x_3 . Крім того, згідно з умовою задачі,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial x_3} = 0, \quad |A| = \text{const}.$$

2. ФУНКЦІЯ ГРІНА

2.1. Рівняння та умови, які задовольняє функція Гріна

Шукана функція Гріна \tilde{G} задовольняє наступне рівняння:

$$\nabla^2 \tilde{G} + k_0^2 \tilde{G} + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_3} - M^2 \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{2\pi} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (4)$$

$$(x_1, x_2) \in A, \quad (x_{10}, x_{20}) \in A, \quad |x_3| < \infty, \quad |x_{30}| < \infty,$$

в якому

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1 h_2} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30})$$

є тривимірною просторовою, а $\delta(x_i - x_{i0})$ ($i = 1, 2, 3$) – одновимірними просторовими дельта-функціями Дірака, $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$ і $\vec{r}_0 = x_{i0} \vec{e}_i$ – радіус-векторами відповідно точки поля і зазначеного джерела, \vec{e}_i – ортами координатних осей x_i , а оператор ∇^2 дається виразом (2) (тут передбачається підсумовування по індексах, що повторюються). Вона описує акустичний тиск у довільній точці циліндра (x_1, x_2, x_3) , який генерується на частоті ω точковим акустичним джерелом, розташованим у циліндрі в точці (x_{10}, x_{20}, x_{30}) (рис. 1).

Граничними умовами для функції \tilde{G} є рівність нулеві нормальної компоненти акустичної швидкості на стінці циліндра S (у разі її акустичної жорсткості):

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (5)$$

або відсутність акустичного тиску на S (у разі акустичної м'якості стінки):

$$\left. \tilde{G} \right|_S = 0, \quad (6)$$

або ж, у разі акустичної жорсткості якоїсь частини стінки S (наприклад, S_1) і акустичної м'якості решти стінки циліндра ($S_2 = S - S_1$), відсутність зазначених характеристик акустичного поля на відповідних частинах поверхні S :

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad \tilde{G}|_{S_2} = 0, \quad S_1 + S_2 = S \quad (7)$$

(тут \vec{n} – зовнішня нормаль до стінки S , а поверхні S_1 та S_2 можуть складатися з кількох областей).

Крім цього, не повинно бути відбиття звуку на кінцях циліндра (на нескінченності), а також повинен виконуватися принцип взаємності [1–3]:

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0; \omega) = \tilde{G}(\vec{r}_0, \vec{r}; \omega). \quad (8)$$

2.2. Побудова функції Гріна та її аналіз

Розв'язок граничної задачі (4)–(8) шукатимемо у вигляді ряду за акустичними модами циліндра Ψ_{nm} :

$$\tilde{G}(x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_{20}, x_{30}; \omega) = \sum_n \sum_m \tilde{G}_{nm}(x_3, x_{10}, x_{20}, x_{30}; \omega) \Psi_{nm}(x_1, x_2). \quad (9)$$

Таке представлення функції \tilde{G} задовольняє (залежно від типу стінок циліндра) одну із граничних умов (5)–(7), а його невідомі коефіцієнти \tilde{G}_{nm} – одновимірне конвективне рівняння Гельмгольца

$$\begin{aligned} (1 - M^2) \frac{\partial^2 \tilde{G}_{nm}}{\partial x_3^2} + k_{f_{nm}}^2 \tilde{G}_{nm} + i2k_0 M \frac{\partial \tilde{G}_{nm}}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \delta(x_3 - x_{30}), \\ k_{f_{nm}} = \sqrt{k_0^2 - k_{nm}^2}, \quad (x_{10}, x_{20}) \in A, \quad |x_3| < \infty, \quad |x_{30}| < \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Воно одержується з рівняння (4) після підстановки туди ряду (9), подальшого множення одержаного при цьому співвідношення скалярно на моди Ψ_{nm} , а також врахування ортогональності останніх:

$$\begin{aligned} \iint_A \Psi_{nm}(x_1, x_2) \Psi_{sq}(x_1, x_2) dA = \begin{cases} \|\Psi_{nm}\|^2, & (s, q) = (n, m), \\ 0, & (s, q) \neq (n, m), \end{cases} \\ \|\Psi_{nm}\|^2 = \iint_A \Psi_{nm}^2(x_1, x_2) dA, \quad dA = h_1 h_2 dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (11)$$

і рівняння

$$\nabla_{(x_1, x_2)}^2 \Psi_{nm}(x_1, x_2) = -k_{nm}^2 \Psi_{nm}(x_1, x_2), \quad (12)$$

яке функції Ψ_{nm} мають задовольняти.

У співвідношеннях (9)–(12)

$$\nabla_{(x_1, x_2)}^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]$$

є оператором Лапласа у координатах x_1, x_2 , k_{nm} – модальними хвильовими числами у поперечному перерізі циліндра, k_{fnn} – модальними осьовими хвильовими числами, а $\|\Psi_{nm}\|^2$ – квадратами норм мод Ψ_{nm} . Кількість же мод Ψ_{nm} та межі сум у представленні (9) залежать від форми поперечного перерізу циліндра і типу його стінок.

Розв’язок рівняння (10) можна одержати з розв’язку його класичного одновимірного аналогу, до якого можна звести (10) шляхом виконання операцій, використаних в [2]. Для цього перепишемо невідомі функції \tilde{G}_{nm} у наступному вигляді:

$$\tilde{G}_{nm}(x_3, x_{10}, x_{20}, x_{30}; \omega) = \frac{\lambda l}{c_0} e^{-i\lambda^2 M k_0 (x_3 - x_{30})} \hat{G}_{nm}(X_3, x_{10}, x_{20}, X_{30}; \Omega), \quad (13)$$

після чого підставимо (13) у (10). Це приводить до класичного одновимірного рівняння Гельмгольца для функцій \hat{G}_{nm} :

$$\frac{\partial^2 \hat{G}_{nm}}{\partial X_3^2} + K_{fnn}^2 \hat{G}_{nm} = -\frac{1}{2\pi} \frac{c_0 l}{\lambda} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \delta\left(\frac{l}{\lambda}(X_3 - X_{30})\right) \quad (14)$$

в області $|X_3| < \infty$, $|X_{30}| < \infty$. Тут $X_3 = \lambda x_3 / l$, $X_{30} = \lambda x_{30} / l$ – безрозмірні осьові координати, $\Omega = \lambda \omega l / c_0 = \lambda k_0 l$ – безрозмірна частота, $\lambda = 1 / \sqrt{1 - M^2}$ – безрозмірний параметр, l – масштаб довжини, який можна вибирати довільним чином [3], а $K_{fnn} = \sqrt{\Omega^2 - k_{nm}^2} l = \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2} l$ – безрозмірні модальні осьові хвильові числа.

З урахуванням умови випромінювання у нескінченність, яку повинна задовольняти функція \tilde{G} (а відтак, внаслідок співвідношень (9) і (13), і коефіцієнти \hat{G}_{nm}), розв’язок рівняння (14) для нескінченної області набуває такого вигляду [2]:

$$\hat{G}_{nm} = \frac{i c_0}{4\pi K_{fnn}} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} e^{iK_{fnn}|X_3 - X_{30}|}. \quad (15)$$

Тоді з представлення (13) і виразу (15) одержуємо розв’язок рівняння (10):

$$\tilde{G}_{nm} = \frac{i\lambda}{4\pi \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2}} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} e^{i(\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2} |x_3 - x_{30}| - \lambda^2 M k_0 (x_3 - x_{30}))}. \quad (16)$$

Підстановка ж (16) у ряд (9) дає вираз для шуканої функції Гріна \tilde{G} :

$$\tilde{G} = \frac{i\lambda}{4\pi} e^{-i\lambda^2 M k_0 (x_3 - x_{30})} \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x_1, x_2) \frac{e^{i\lambda \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2} |x_3 - x_{30}|}}{\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - k_{nm}^2}}. \quad (17)$$

Аналіз (17) показує, що функція \tilde{G} записується у вигляді ряду за акустичними модами циліндра Ψ_{nm} . Вона також задовольняє принцип взаємності (8), умову випромінювання у нескінченність, а також, залежно від розглянутих вище типів стінок циліндра, одну із умов (5)-(7). Крім цього, в (17) через числа M і λ в явному вигляді відображено вплив течії на функцію \tilde{G} . Цей вплив збільшується зі збільшенням числа Маха M , викликаючи, окрім іншого, появу і подальше збільшення асиметрії функції \tilde{G} відносно поперечного перерізу циліндра $x_3 = x_{30}$, в якому розташоване точкове акустичне джерело. Натомість зменшення числа M приводить до зменшення впливу течії на функцію \tilde{G} , зумовлюючи, зокрема, зменшення зазначеної її асиметрії. У випадку ж відсутності течії ($M = 0$, $\lambda = 1$) функція (17) є симетричною відносно перерізу $x_3 = x_{30}$:

$$\tilde{G}|_{M=0} = \frac{i}{4\pi} \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x_1, x_2) \frac{e^{i\sqrt{k_0^2 - k_{nm}^2}|x_3 - x_{30}|}}{\sqrt{k_0^2 - k_{nm}^2}}.$$

ВИСНОВКИ

1. Розробленим у даній роботі *методом* побудовано функцію Гріна \tilde{G} тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого порожнинного циліндра довільної (але незмінної по його довжині) форми та площі поперечного перерізу з акустично жорсткими і акустично м'якими стінками, а також зі стінками змішаного типу. Вона представляється рядом за акустичними модами циліндра.
2. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти рівномірної осередненої течії в циліндрі. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції \tilde{G} відносно поперечного перерізу циліндра $x_3 = x_{30}$, в якому розташоване акустичне джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу течії на функцію \tilde{G} зменшується, проявляючись, окрім іншого, у зменшенні зазначеної її асиметрії. У випадку ж відсутності течії \tilde{G} є симетричною відносно перерізу $x_3 = x_{30}$.
3. При виконанні умов, зазначених у примітці 1, а також за умови збереження лінійності задачі, цей метод може бути розширений на випадок прямих циліндрів довільної форми поперечного перерізу з довільним типом стінок.
4. Запропонований у даній роботі підхід створює основи для подальшого розроблення аналітичних методів кількісного знаходження характеристик акустичних полів, які генеруються у каналах з *нерегулярною* геометрією та внутрішньою течією.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Howe M. S.* Acoustics of fluid-structure interactions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.
2. *Борисюк А. О.* Функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією // Акуст. вісн. – 2011. – Том 14, № 4. – С. 9–17.
3. *Борисюк А. О.* Функція Гріна тривимірного конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої труби // Доп. НАН Укр. – 2015. – № 12. – С. 33–40.