

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБЪЕМНОГО РАССЕЯНИЯ ЗВУКА В ИНТЕНСИВНЫХ ГАЗОВЫХ ФАКЕЛАХ ПРИ МНОГОЧАСТОТНОМ ЗОНДИРОВАНИИ

А. А. ЛЮБИЦКИЙ, А. Е. ПОЕДИНЧУК

*Институт радиопизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины, Харьков*

Представлен новый метод и численный алгоритм решения обратной задачи объемного рассеяния звука в интенсивных газовых факелах – восстановления размерного спектра газовой выделений по данным многочастотного акустического зондирования. В результате численных экспериментов показана возможность определения спектра на ограниченном наборе частот, допускающем практическую реализацию.

### ВВЕДЕНИЕ

Результаты натурных исследований характеристик обратного рассеяния звука в газовых факелах (ГФ) над метановыми сипами на морском дне, показывают, что процесс рассеяния, как правило, носит некогерентный (диффузный) характер [1]. Для диагностики таких факелов, когда эхо-сигнал формируется большим числом пузырьков разных размеров, необходимо использование многочастотных гидроакустических систем (ГАС). При этом возникает задача определения функции распределения пузырьков по размерам на основе данных измерений коэффициентов объемного рассеяния звука на дискретном множестве рабочих частот ГАС (т.н. обратная задача объемного рассеяния). В работах [2,3] была показана возможность восстановления одномодовых размерных спектров пузырьков по данным многочастотного акустического зондирования факелов с использованием метода конечных элементов и классических методов регуляризации некорректных задач Тихонова-Лаврентьева [4,5]. Однако, достаточно большое число необходимых для этого рабочих частот ГАС ( $\geq 20$ ) затрудняет практическую реализацию методов. Это обстоятельство требует развития новых подходов к решению обратной задачи, позволяющих минимизировать число измерительных каналов.

В докладе представлен новый метод и численный алгоритм решения обратной задачи рассеяния звука в интенсивных ГФ. Приводятся и анализируются результаты численных экспериментов по восстановлению размерного спектра газовой выделений из акустических данных, подтверждающие эффективность предложенного алгоритма.

### 1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Исходным для решения обратной задачи является интегральное уравнение

$$m_V(f) = \int_0^{\infty} \sigma_{BS}(f, r)n(r)dr, \quad (1)$$

связывающее коэффициент обратного объемного рассеяния звука  $m_V(f)$  на частоте зондирующего сигнала  $f$  с искомой функцией распределения пузырьков по размерам  $n(r)$ . Ядро  $\sigma_{BS}(f, r)$  интегрального уравнения (1) представляет собой сечение обратного рассеяния звука газовым пузырьком радиуса  $r$ , определяемое соотношением

$$\sigma_{BS} = r^2 / \left[ \left( 1 - f_r^2 / f^2 \right)^2 + \delta^2 \right], \quad (2)$$

где  $f_r$  – резонансная частота пузырька,  $\delta$  - постоянная демпфирования,  $r$  - эквивалентный радиус (радиус сферы с объемом, равным объему пузырька). Предполагается, что отклонением формы граничной поверхности пузырька от эквивалентной сферы малы, так что можно пренебречь смещением резонансных частот. Далее, не ограничивая общности рассмотрения, будем предполагать, что  $\delta = const$ , а резонансная частота  $f_r$  с достаточной точностью определяется известной эмпирической формулой [6]:

$$f_r = \frac{3,26}{r} \sqrt{1 + 0,0985H} \text{ [Гц]}, \quad (3)$$

где  $H$  - глубина погружения пузырька в (м).

С учетом (2) и(3) интегральное уравнение (1) преобразовывается к виду

$$M(y) = \int_0^{\infty} K(x, y)N(x)dx, \quad (4)$$

здесь  $x = r^2$ ,  $y = f^2$ ,  $N(x) = x^{5/2}n(\sqrt{x})$   $M(y) = 2m_v(\sqrt{y})/y^2$ ,

$$K(y, x) = (c - xy)^2 + \delta^2 x^2 y^2)^{-1}; c = 10.63(1 + 0,0985H).$$

Обратная задача состоит в определении функции  $N(x)$  по известной функции  $M(y)$ , заданной на дискретном множестве значений переменной  $y$ .

Поскольку уравнение (4) является интегральным уравнением Фредгольма 1<sup>го</sup> рода, то сформулированная обратная задача является некорректной даже в случаях, когда  $M(y)$  известна для всех  $f \in [0, \infty)$ . Это обстоятельство требует использовать для решения поставленной задачи соответствующие регуляризирующие алгоритмы [4,5]. Ниже излагается новый эффективный алгоритм решения некорректных задач этого класса, основанный на  $\alpha$ -регуляризации Лаврентьева М.М. и замене Страхова В.Н. [4,7].

Структура алгоритма предполагает проведение следующих преобразований интегрального уравнения (4). Введем новую неизвестную функцию  $Q(t)$ , связанную с исходной функцией  $N(x)$  соотношением

$$N(x) = \int_{F1}^{F2} K(x, t)Q(t)dt. \quad (5)$$

С помощью (5) уравнение (4) преобразуется к виду

$$M(y) = \int_{F1}^{F2} R(y, t)Q(t)dt, \quad (6)$$

где 
$$R(y, t) = \frac{2}{c^3[(t-y)^2\delta^2 + (y+t)^2]} \left[ \bar{K}(y, t) + \frac{(y+t)(1+\delta^2)}{2\delta} \left( \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{1}{\delta}\right) \right) \right],$$

$$\bar{K}(y, t) = \begin{cases} yt \frac{\lg y - \lg t}{y-t}, & \frac{(y-t)^2}{3t^2} \geq \varepsilon, \\ y \left( 1 - \frac{y-t}{2t} + \frac{(y-t)^2}{3t^2} \right), & \frac{(y-t)^2}{3t^2} < \varepsilon \end{cases}$$

( $\varepsilon$  - малое положительное число).

Интегральное уравнение (6) имеет следующие преимущества перед исходным уравнением. Во-первых, новая неизвестная функция  $Q(t)$  разыскивается на интервале

$[F_1, F_2]$ , на котором задается правая часть  $M(y)$  (коэффициент обратного объемного рассеяния), во-вторых, при  $F_1 \rightarrow 0$  и  $F_2 \rightarrow \infty$  интегральный оператор (6) становится близок по операторной норме к некоторому положительно определенному оператору.

Следующие преобразования состоят в аппроксимации интегрального оператора (6) конечномерным оператором согласно квадратурной формуле трапеций

$$\int_{F_1}^{F_2} R(y, t) Q(t) dt \cong \Delta h \sum_{n=1}^N \varepsilon_n R(y, t_n) Q(t_n), \quad (7)$$

где  $\Delta h = \frac{F_2 - F_1}{N - 1}$ ;  $t_n = F_1 + (n - 1)\Delta h$ ;  $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \neq 1, N \\ 0,5 & n = 1, N \end{cases}$ .

С учетом (7) имеем

$$\overline{M} = A \overline{Q}, \quad (8)$$

где  $A = \|R_n(y_m)\|_{m=1, \dots, M}^{n=1, \dots, N}$ ,  $R_n(y) = \Delta h \varepsilon_n R(y, t_n)$ ,  $Q_n = Q(t_n)$ ,  $\overline{Q} = (Q_1, \dots, Q_N)^T$

$$\overline{M} = (M_1, \dots, M_M)^T, \quad M_m = M(y_m), \quad m = 1, \dots, M$$

Согласно идеи Страхова [7], сделаем в (8) замену вектор-столбцов  $\overline{Q}$  по формуле

$$\overline{Q} = A^T \overline{P}, \quad (9)$$

где  $A^T$  - транспонированная матрица к  $A$ ,  $\overline{P} = (P_1, \dots, P_M)^T$  - новый неизвестный вектор-столбец.

С помощью (9) получаем из (8)

$$\overline{M} = A A^T \overline{P}. \quad (10)$$

Можно доказать, что матрица  $A A^T$  является положительной, однако, определитель этой матрицы может быть близок к нулю (некорректность исходного интегрального уравнения). Кроме того, левая часть в (10) известна с некоторой погрешностью (погрешность измерений коэффициентов обратного объемного рассеяния звука). В связи с этим, используя метод регуляризации Лаврентьева, получаем

$$P = (\alpha I + A A^T)^{-1} \overline{M}, \quad (11)$$

где  $\alpha > 0$  параметр регуляризации.

Подставляя (11) в (9), окончательно имеем решение исходного интегрального уравнения

$$\overline{Q}_\alpha = A^T (\alpha I + A A^T)^{-1} \overline{M}, \quad (12)$$

зависящее от параметра регуляризации. Выбор значения параметра регуляризации должен быть согласован с погрешностью  $\Delta$  входных данных. Это можно сделать с помощью функции невязки

$$\|A \overline{Q}_\alpha - \overline{M}\|^2 = \Delta^2, \quad (13)$$

где  $\|\dots\|$  - обозначает норму вектор-столбца в конечномерном пространстве  $R^M$  ( $M$  - число частот, для которых известен коэффициент обратного объемного рассеяния звука). Таким образом, для заданной погрешности  $\Delta$  из уравнения (13) определяем параметр регуляризации  $\alpha > 0$ , а из (12) -  $\overline{Q}_\alpha$ , тогда для искомой функции  $N(x)$  из (5), получаем

$$N(x) = \Delta h \sum_{n=1}^N \varepsilon_n K(x, t_n) Q_{\alpha n}, \quad (14)$$

где  $Q_{\alpha n}$  - компоненты вектора-столбца  $\overline{Q}_\alpha = (Q_{\alpha 1}, Q_{\alpha 2}, \dots, Q_{\alpha N})^T$

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Разработанный алгоритм решения обратной задачи рассеяния звука был реализован в виде комплекса программ для персонального компьютера. С его помощью были проведены численные эксперименты, целью которых являлось исследование:

- возможности восстановления размерного спектра пузырьков  $n(r)$  по данным измерений коэффициента объемного рассеяния  $m_V(f)$  для дискретного набора частот, допускающую практическую реализацию;
- вычислительной эффективности предложенного алгоритма.

Вычислительный эксперимент включал в себя следующие этапы: выбор распределения  $n(r)$ , подлежащего восстановлению → генерирование входных данных (коэффициентов  $m_V(f_p)$ ) путём решения прямой задачи (1) для этого  $n(r)$  с последующим добавлением к ним равномерно распределенного шума (моделирование погрешности измерений) → восстановление  $n(r)$  → сглаживание  $n(r)$ . Так как сведения о виде размерного спектра  $n(r)$  в газовых факелах в настоящее время крайне ограничены, то в качестве искомых функций распределений  $n(r)$  использовались одномодовые (с одним максимумом) гауссовское, логнормальное распределения, а также модельные зависимости вида

$$n(r) = n_0 r^\alpha e^{-\beta r}, \quad (15)$$

аппроксимирующие данные натуральных измерений размерного спектра дискретных газовойделений в районе дельты Палеоднепра ([1]). Учитывая подобие (в качественном отношении) полученных результатов для разных  $n(r)$ , ограничимся при дальнейшем обсуждении случаем решения обратной задачи для функции распределения  $n(r)$  вида (15).

Как показали численные расчеты, наиболее информативным для решения обратной задачи является интервал частот  $f \leq 20$  кГц, где частотная зависимость  $m_V(f)$  существенна (в высокочастотном диапазоне  $f \geq 20$  кГц коэффициент  $m_V$  практически не зависит от частоты зондирующего сигнала, что отражает характер поведения сечения обратного рассеяния одиночных пузырьков  $\sigma_{BS}$  в высокочастотном пределе:  $\sigma_{BS}(f, r) \approx r^2$  при  $f \gg f_r$ ).

Численные эксперименты проводились для дискретных наборов из 5-20 частот диапазона 1 – 30 кГц. С целью минимизации количества рабочих частот использовались неэквидистантные сетки с разреженным шагом по частоте на интервале слабой зависимости  $m_V(f)$ . Относительная величина погрешностей измерений коэффициента  $m_V$  (шум во входных данных) варьировалось от 0 до 25%. В качестве критерия точности восстановления использовался параметр  $\zeta$ , определяемый соотношениями

$$\zeta = \sum_{i=1}^N [n_B(r_i) - n_M(r_i)]^2 / \sum_{i=1}^N n_M^2(r_i), \quad (16)$$

где  $n_B(r_i)$  и  $n_M(r_i)$  - исходная (модельная) и восстановленная функции распределения пузырьков по размерам. Расчеты зависимостей критерия  $\zeta$  от параметра регуляризации  $\alpha$  для разных наборов частот и различных значений погрешности входных данных показали, что они имеют выраженный минимум при некотором оптимальном значении  $\alpha = \alpha_m$ , которое возрастает от  $\sim 10^{-8}$  до  $\sim 10^{-6}$  согласованно с увеличением ошибки во

входных данных от 1 до 20% (см. рис.1). Этот факт позволяет, наряду с уравнением (13), выбирать оптимальные значения  $\alpha$ , согласованно с погрешностью входных данных. Все численные эксперименты по восстановлению функции распределения  $n(r)$  проводились при  $\alpha = \alpha_m$ . Некоторые из полученных результатов представлены на рис. 2-4.

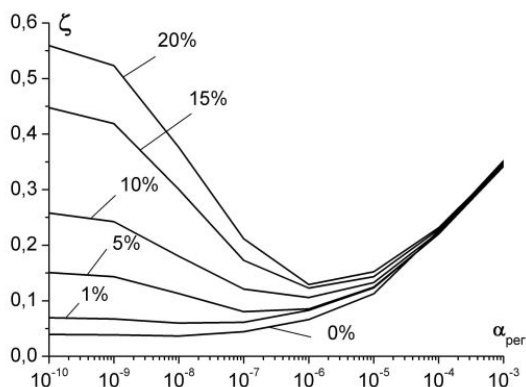


Рис. 1 - Зависимость погрешности восстановления  $\zeta$  от параметра регуляризации  $\alpha_{per}$  для различных значений ошибки измерения  $m_V$

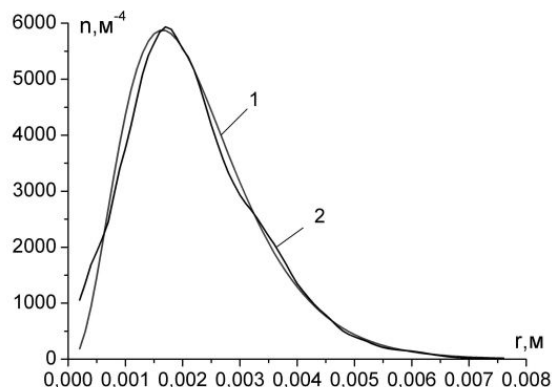


Рис. 2- Пример восстановления функции  $n(r)$  для 9 частот и ошибки измерений 1%;  
1- модельная зависимость,  
2- восстановленная функция

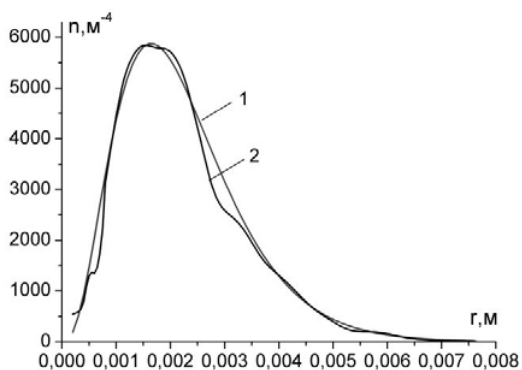


Рис.3 - Пример восстановления функции  $n(r)$  для 19 частот и ошибки измерений 10%

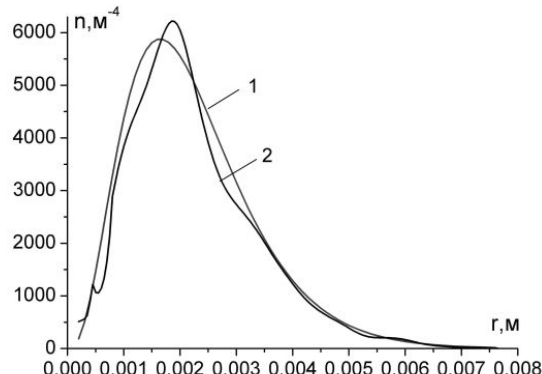


Рис. 4 - Пример восстановления функции  $n(r)$  для 8 частот и ошибки измерений 10%;

Анализ полученных данных позволяет отметить следующее. При малом (1%-м) уровне погрешности входных данных функция распределение пузырьков по размерам может быть восстановлена с малой ( $\zeta \leq 0,07$ ) погрешностью для наборов  $m \geq 9$  частот зондирующего сигнала. С увеличением уровня шумов во входных данных и уменьшением числа рабочих частот  $M$  (см. рис. 4) величина  $\zeta$  возрастает. Однако, уровень погрешности восстановления остается приемлемым ( $\zeta \leq 0,17$ ) при значительных (до 15%) ошибках измерения коэффициента  $m_V$  на 6-8 рабочих частотах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исходная обратная задача объемного рассеяния звука в ГФ при многочастотном зондировании сведена к интегральному уравнению относительно неизвестной функции, область определения которой связана с диапазоном частот зондирующих сигналов. Интегральный оператор, задаваемый этим уравнением, близок по операторной норме к положительному оператору. Это позволило разработать специальную процедуру регуляризации уравнения и свести его к системе линейных алгебраических уравнений с положительной матрицей. Результаты численных экспериментов свидетельствуют об эффективности предложенного алгоритма решения обратной задачи и возможности восстановления функции распределения газовых пузырьков по размерам на ограниченном наборе частот зондирующих сигналов, допускающем практическую реализацию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Любичкий А. А., Бережная Н. Д. Обратное рассеяние звука в газовых факелах Черного моря // Сб. Акустика океана Доклады XIV школы-семинара им. акад. Л. М. Бреховских, совмещенной с XXVI сессией Российского Акустического общества. М.: ГЕОС. – 2013. – С. 142–145.
2. Commander K. W., McDonald R. J. Finite-element solution of the inverse problem in bubble swarm acoustics // J. Acoust. Soc. Am. – 1991. – **89**. – P. 592–597.
3. Любичкий А. А. Обратная задача рассеяния звука в интенсивных газовых факелах и модельные оценки пузырькового массопереноса метана по данным акустического зондирования // Сб. Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь, 2005. – вып. 13, С. 412–424.
4. Лаврентьев, М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН СССР. – 1959. – **127**, № 1. С.31–33.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. – 1979. – 288 с.
6. Урик, Р. Дж. Основы гидроакустики. – Л.: Судостроение, 1978. – 446 с.
7. Страхов В. Н., Страхов А. В. Аппроксимационный подход к решению задач гравиметрии и магнитометрии. I. Основная вычислительная проблема – регуляризация систем линейных алгебраических уравнений // Российский журнал о Земле. – 1999. – **1**, № 4. – С. 271–296.