

## БОКОВЕ ОПРОМІНЕННЯ М'ЯКОГО СКІНЧЕННОГО КОНУСА ПЛОСКОЮ АКУСТИЧНОЮ ХВИЛЕЮ

Д. Б. КУРИЛЯК, В. О. ЛИСЕЧКО

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів*

Отримано розв'язок задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на м'якому порожнистому конусі при боковому опроміненні. Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) другого роду методом розкладу потенціалу за власними функціями рівняння Гельмгольца в підобластях та застосуванням процедури аналітичної регуляризації. Отримана НСЛАР допускає розв'язок із заданою точністю. Наведено приклади числового моделювання. Розглянуто граничний перехід до диска.

### ВСТУП

Задача дифракції акустичних хвиль на конусі є однією із канонічних проблем в акустиці. Найбільш повно та якісно вивчалась вона для напівнескінчених конусів із різними типами граничних умов (див. бібліографію в [1]). Для вивчення явища дифракції на скінчених конусах, в основному, використовували методи геометричної теорії дифракції [2], метод Вінера-Хопфа у поєднанні з методом інтегральних перетворень Конторовича-Лебедева [3] та метод часткових підобластей [4]. Тут для розв'язання задачі використано метод часткових підобластей сумісно з процедурою аналітичної регуляризації [5]. Досліджено дифракцію плоскої акустичної хвилі на м'якому конусі при боковому опроміненні, що є узагальненням задачі, сформульованої у [6].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай у сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$  задано ідеально м'який порожнистий конус  $Q: \{r \in (0, c); \theta = \gamma; \varphi \in [0, 2\pi)\}$  (рис. 1). Конус  $Q$  опромінюється плоскою монохроматичною хвилею, що поширюється під кутом  $\alpha$  відносно додатної осі  $z$ , потенціал швидкості якої  $U^{(i)} = \exp(ikr \cos \psi)$ , де  $\cos \psi = \sin \theta \cos \varphi \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha$ , записуємо так

$$U^{(i)}(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m^{(i)}(r, \theta) \cos m\varphi,$$

$$U_m^{(i)}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)}(\alpha) P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) I_{z_n^{(m)}}(sr),$$

$$A_n^{(m)}(\alpha) = \sqrt{2\pi} (2 - \delta_m^0) (-1)^{z_n^{(m)}-1/2} z_n^{(m)} \frac{\Gamma(z_n^{(m)} + 1/2 - m)}{\Gamma(z_n^{(m)} + 1/2 + m)} P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \alpha).$$

Тут  $s = -ik$ ,  $k = \omega / c_0$  – хвильове число,  $\omega$  – кругова частота,  $c_0$  – фазова швидкість;  $P_{\eta-1/2}^m(\cdot)$  – приєднана функція Лежандра;  $I_{\eta}(\cdot)$  – модифікована функція Бесселя;  $\delta_m^0$  –

символ Кронекера;  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функція;  $z_n^{(m)} = n + m - 1/2$ . Гармонічну часову залежність акустичного поля задаємо у вигляді  $\exp(-i\omega t)$  і надалі опускаємо.

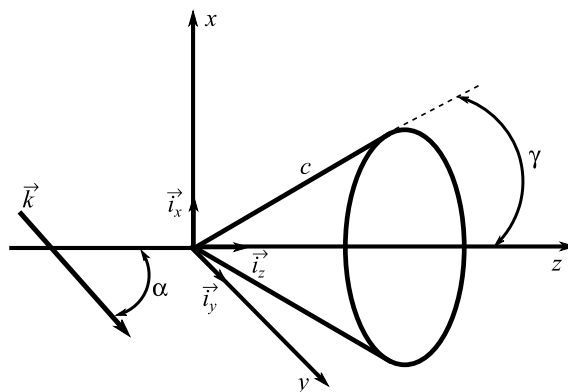


Рис. 1. Геометрія задачі.

Тоді, ввівши потенціал швидкості дифрагованого поля  $U(r, \theta, \varphi)$  у вигляді

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(r, \theta) \cos m\varphi,$$

задачу дифракції формулюємо як змішану крайову задачу для рівняння Гельмгольца відносно невідомих гармонік Фур'є  $U_m(r, \theta)$  і записуємо так

$$\Delta U_m(r, \theta) + k^2 U_m(r, \theta) = 0,$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta}$ .

Шуканий потенціал швидкості повинен задовольняти граничній умові Діріхле на поверхні конуса  $Q$

$$[U_m(r, \theta) + U_m^{(i)}(r, \theta)]|_{r, \theta \in Q} = 0,$$

а також умові випромінювання Зомерфельда і умові обмеженості енергії поля у довільному скінченному об'ємі  $V$ , яка зводиться до виконання умови Мейкснера на вершині і краю конуса.

## 2. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Для розв'язання задачі розіб'ємо увесь простір існування звукового тиску на підобласті  $D_1 : \{r \in (0, c), \theta \in [0, \gamma]\}$ ,  $D_2 : \{r \in (0, c), \theta \in (\gamma, \pi]\}$ ,  $D_3 : \{r \in (c, \infty), \theta \in [0, \pi]\}$ , в яких повне поле подамо у вигляді

$$U_m^{(t)}(r, \theta) = \begin{cases} U_m(r, \theta) + U_m^{(i)}(r, \theta), & (r, \theta) \in D_3; \\ U_m(r, \theta), & (r, \theta) \in D_1, D_2. \end{cases}$$

Потенціал швидкості дифрагованого поля шукаємо у вигляді

$$U_m(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^{(m;1)} P_{\nu_p^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) \frac{I_{\nu_p^{(m)}}(sr)}{I_{\nu_p^{(m)}}(sc)}, & r, \theta \in D_1; \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(m;2)} P_{\mu_k^{(m)}-1/2}^m(-\cos \theta) \frac{I_{\mu_k^{(m)}}(sr)}{I_{\mu_k^{(m)}}(sc)}, & r, \theta \in D_2; \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n^{(m)} P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) \frac{K_{z_n^{(m)}}(sr)}{K_{z_n^{(m)}}(sc)}, & r, \theta \in D_3, \end{cases} \quad (1)$$

де  $y_p^{(m;1)}$ ,  $y_k^{(m;2)}$ ,  $\bar{x}_n^{(m)}$  – невідомі коефіцієнти розкладу,  $K_{\eta}(\cdot)$  – функція Макдональда;  $\nu_p^{(m)}$ ,  $\mu_k^{(m)}$  – залежні від  $\gamma$  додатні корені трансцендентних рівнянь

$$P_{\eta-1/2}^m(\cos \gamma) \Big|_{\eta=\nu_p^{(m)}} = 0, \quad P_{\eta-1/2}^m(-\cos \gamma) \Big|_{\eta=\mu_k^{(m)}} = 0. \quad (2)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу в (1) використовуємо умови спряження повного потенціалу і його нормальної похідної на поверхні уявної сфери  $r = c$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , яка містить край конуса. В результаті приходимо до системи суматорних рівнянь, які у зв'язку з особливістю градієнту потенціалу  $gradU = O(\rho^{-1/2})$  при  $\rho \rightarrow 0$  ( $\rho$  – відстань до краю конуса у локальній системі координат) запишуться у вигляді

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[ \bar{x}_n^{(m)} + A_n^{(m)}(\alpha) I_{z_n^{(m)}}(sc) \right] P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(m;1)} P_{\nu_p^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta), & \theta \in [0, \gamma); \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k^{(m;2)} P_{\mu_k^{(m)}-1/2}^m(-\cos \theta), & \theta \in (\gamma, \pi]; \end{cases} \quad (3)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[ \bar{x}_n^{(m)} \frac{K'_{z_n^{(m)}}(sc)}{K_{z_n^{(m)}}(sc)} + A_n^{(m)}(\alpha) I'_{z_n^{(m)}}(sc) \right] P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) =$$

$$= \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(m;1)} P_{\nu_p^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta) \frac{I'_{\nu_p^{(m)}}(sc)}{I_{\nu_p^{(m)}}(sc)}, & \theta \in [0, \gamma); \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k^{(m;2)} P_{\mu_k^{(m)}-1/2}^m(-\cos \theta) \frac{I'_{\mu_k^{(m)}}(sc)}{I_{\mu_k^{(m)}}(sc)}, & \theta \in (\gamma, \pi]. \end{cases} \quad (4)$$

Для алгебраїзації систем суматорних рівнянь (3), (4) використаємо умови ортогональності приєднаних функцій Лежандра дробового індексу [5] і, обмежившись скінченною кількістю доданків, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\eta^2 - (z_n^{(m)})^2} [x_n^{(m)} + A_n^{(m)}(\alpha) P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \gamma) I_{z_n^{(m)}}(sc)] = \frac{1}{\alpha^\pm(\eta, \gamma)} \begin{cases} y_p^{(m;1)}, p = 1, 2, \dots, P; \\ y_k^{(m;2)}, k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\eta^2 - (z_n^{(m)})^2} \left[ x_n^{(m)} \frac{K'_{z_n^{(m)}}(sc)}{K_{z_n^{(m)}}(sc)} + A_n^{(m)}(\alpha) P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \gamma) I'_{z_n^{(m)}}(sc) \right] = \\ = \frac{1}{\alpha^\pm(\eta, \gamma)} \begin{cases} y_p^{(m;1)} \frac{I'_{\nu_p^{(m)}}(sc)}{I_{\nu_p^{(m)}}(sc)}, p = 1, 2, \dots, P; \\ y_k^{(m;2)} \frac{I'_{\mu_k^{(m)}}(sc)}{I_{\mu_k^{(m)}}(sc)}, k = 1, 2, \dots, K. \end{cases} \end{aligned} \quad (5b)$$

Тут  $x_n^{(m)} = \bar{x}_n^{(m)} P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \gamma)$ ;  $\eta = \nu_p^{(m)}$  для верхньої стрічки і  $\eta = \mu_k^{(m)}$  – для нижньої;  $\alpha^\pm(\eta, \gamma) = -2\eta / [\partial P_{\nu-1/2}^m(\cos \gamma) / \partial \nu]_{\nu=\eta}$ .

Виключивши у виразах (5a), (5b) невідомі  $y_p^{(m;1)}$ ,  $y_k^{(m;2)}$  та перейшовши до границі  $N, K, P \rightarrow \infty$  ( $N = P + K$ ), отримаємо НСЛАР вигляду

$$A_{11}(m) X^{(m)} = F^{(m)}. \quad (6)$$

Тут  $X^{(m)} = \{x_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty$ ;  $A_{11}(m)$  – нескінченна матриця з елементами,

$$A_{11}(m) : \left\{ a_{qn}^{(11)}(m) = \frac{sc W[K_{z_n^{(m)}} I_{z_q^{(m)}}]_{sc}}{[(z_q^{(m)})^2 - (z_n^{(m)})^2] K_{z_n^{(m)}}(sc) I_{z_q^{(m)}}(sc)} \right\}_{q,n=1}^\infty,$$

де  $\{z_q^{(m)}\}_{q=1}^\infty = \{\nu_p^{(m)}\}_{p=1}^\infty \cup \{\mu_k^{(m)}\}_{k=1}^\infty$  – зростаючі послідовності залежних від  $\gamma$  коренів трансцендентних рівнянь (2);  $F^{(m)} = \{f_q^{(m)}\}_{q=1}^\infty$  – відомий вектор.

Уведемо до розгляду парну мероморфну функцію

$$M(\nu, \gamma; m) = \left\langle \Gamma(\nu - m + 1/2) \Gamma(-\nu - m + 1/2) P_{\nu-1/2}^m(\cos \gamma) P_{\nu-1/2}^m(-\cos \gamma) \right\rangle^{-1},$$

регулярну у смузі  $\Pi : \{|\operatorname{Re} \nu| < 1/2\}$ , а за межами  $\Pi$  має прості нулі і полюси відповідно в точках  $\pm z_n$ ,  $\pm z_q$ ,  $M(\nu, \gamma; m) = O(\nu)$  при  $|\nu| \rightarrow \infty$ . Ця функція допускає факторизацію у вигляді  $M(\nu, \gamma; m) = M_+(\nu, \gamma; m) M_-(\nu, \gamma; m)$ , де  $M_+(\nu, \gamma; m)$ ,  $M_-(\nu, \gamma; m)$  регулярні і не мають нулів у відповідно у півплощинах  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ ,  $\operatorname{Re} \nu < 1/2$  і знаходяться методом нескінченних добутоків;  $M_\pm(\nu, \gamma; m) = O(\nu^{1/2})$  при  $|\nu| \rightarrow \infty$  в областях регулярності.

Тоді пара операторів [5]

$$A(m) : \left\{ a_{qn}(m) = \left\langle \xi_q^{(m)} - z_n^{(m)} \right\rangle^{-1} \right\}_{q,n=1}^{\infty}, \quad (7)$$

$$A^{-1}(m) : \left\{ \tau_{kq}^{(m)} = \left\langle \left\{ M_-^{-1}(\xi_q^{(m)}, \gamma; m) \right\}' M'_-(z_k^{(m)}, \gamma; m)(z_k^{(m)} - \xi_q^{(m)}) \right\rangle^{-1} \right\}_{k,q=1}^{\infty}, \quad (8)$$

є регуляризуючими для НСЛАР (6). У граничному випадку при  $\gamma = \pi/2$  конус переходить у м'який диск. Тоді  $\xi_q^{(m)} = 2q + m - 1/2$ ,  $z_n^{(m)} = 2n + m - 3/2$ , а вирази для матричних елементів оберненого оператора записуються так

$$\tau_{kq}^{(m)} = \frac{8\Gamma(q+m+1/2)\Gamma(k+m+1/2)}{\pi^2(1-2k-2m)(2k-2q-1)\Gamma(q+m)\Gamma(k+m)}.$$

Використавши (7), (8), перейдемо від (6) до НСЛАР другого роду у вигляді

$$X^{(m)} = A^{-1}(m)[A(m) - A_{11}(m)]X^{(m)} + A^{-1}(m)F^{(m)}. \quad (9)$$

НСЛАР (9) допускає розв'язок у класі послідовностей  $b(\sigma) : \{ \|x_n^{(m)}\| = \sup_n |x_n^{(m)}| n^\sigma, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(m)} n^\sigma = 0 \}$ , коли  $0 \leq \sigma < 3/2$ , що забезпечує виконання умови Мейкснера на краю.

### 3. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розв'язки НСЛАР (9) використали для дослідження дифрагованого поля у зоні випромінювання. Аналізували діаграми спрямованості та повні перерізи розсіяння:

$$D(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_n^{(m)} P_{z_n^{(m)}-1/2}^m(\cos \theta)}{K_{z_n^{(m)}}(sc)} \right|, \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_t}{2\pi c^2} = \frac{\pi}{2(kc)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2 - \delta_m^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\bar{x}_n^{(m)}|^2}{z_n^{(m)} |K_{z_n^{(m)}}(sc)|^2} \frac{\Gamma(z_n^{(m)} + m + 1/2)}{\Gamma(z_n^{(m)} - m + 1/2)}. \quad (11)$$

Кількість невідомих у рядах (10), (11) утримували виходячи із умов  $n = |sc| + q$ ,  $m = |sc| + q$ ,  $q = 4 \dots 10$ .

На рис. 2 показано вплив кута падіння  $\alpha$  на діаграми спрямованості широкого конуса ( $\gamma = 60^\circ$ ), які розраховувалися при  $\varphi = 0^\circ$ . Із поведінки кривих на цьому рисунку видно, що максимум головної пелюстки  $D(\theta, \varphi = 0^\circ)$  формується в околі кута спостереження  $\theta = \alpha$ . Крім цього, збільшення кута падіння  $\alpha$  ( $\alpha > 0^\circ$ ) призводить до зменшення інтенсивності випромінювання. Найменшу інтенсивність спостерігаємо при опроміненні конуса у напрямі нормальному до осі симетрії ( $\alpha = 90^\circ$ ).

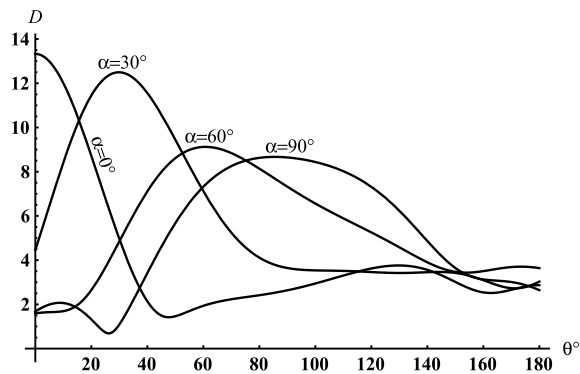


Рис. 2. Залежність діаграм спрямованості дифрагованого поля від кута падіння  $\alpha$  при  $\gamma = 60^\circ$ ,  $kc = 6$ ,  $\varphi = 0^\circ$ .

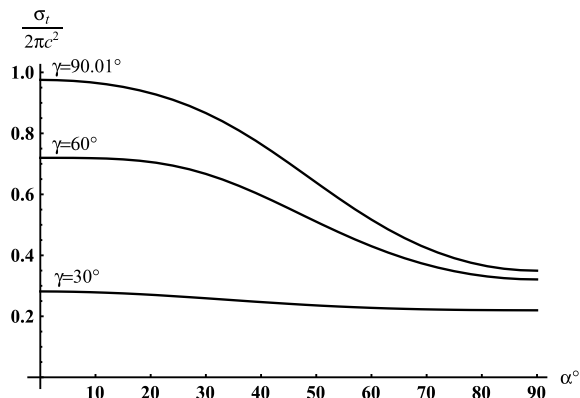


Рис. 3. Сімейства повного перерізу розсіяння як функція кутів розхилу  $\gamma$  і падіння  $\alpha$  при  $kc = 6$ .

На рис. 3 наведено залежність повного перерізу розсіяння  $\sigma_t$  від кута падіння  $\alpha$  і кута розхилу  $\gamma$  при фіксованому значенні хвильового параметра  $kc = 6$ . Із поведінки кривих на рис. 3 бачимо, що для вузьких конусів ( $\gamma = 30^\circ$ ) переріз розсіяння практично не залежить від  $\alpha$ , а для широких ( $\gamma = 60^\circ, 90.01^\circ$ ) – починаючи із  $\alpha > 30^\circ$  – спадає до значень порядку  $\sigma_t = 0.8\pi c^2$ .

## ВИСНОВОК

Отримано розв’язок задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на порожнистому конусі при боковому опроміненні. Показано формування максимуму головної пелюстки діаграми спрямованості у напрямку опромінення. Встановлено залежність повного перерізу розсіяння від кута розхилу  $\alpha$  і показано його монотонне спадання до значень порядку  $\sigma_t = 0.8\pi c^2$  для широких кутів конуса, коли  $\alpha > 30^\circ$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Куриляк Д. Б., Лисечко В. О. Дифракція плоскої акустичної хвилі на напівнескінченному м’якому конусі зі зрізаною вершиною // Акуст. вісн.– 2013–2014. – **16**, №4. – С. 33–41.
2. Keller J. B. Backscattering from a finite cone // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1960. – **8**. – Р. 175–182.
3. Вайслейб Ю. В. Рассеяние звуковых волн на конечном конусе // Акуст. журн. – 1971. – **17**, № 1. – С. 33–42.
4. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Излучение звуковой волны из полого конечного конуса // Линейные краевые задачи мат. физики. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 129–139.
5. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. – К.: Наук. думка, 2006. – 280 с.
6. Куриляк Д. Б., Лисечко В. О. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному м’якому конусі при осьовому опроміненні // Акуст. вісн.– 2013–2014. – **16**, №3. – С. 23–30.