

## ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ПІДХОДІВ ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ХВИЛЬОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЧАСТКОВИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБЛАСТЕЙ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

В.Т. ГРІНЧЕНКО<sup>1</sup>, І.В. ВОВК<sup>1</sup>, В.Т. МАЦИПУРА<sup>2</sup>, Я.П. ТРОЦЕНКО<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут гідромеханіки НАН України

<sup>2</sup>Київський національний університет імені Тараса Шевченка

В роботі дано опис двох підходів, що дозволяють застосувати метод часткових областей у випадку, коли суміжні часткові області перетинаються. Порівняння ефективності двох підходів проводиться на прикладі побудови розв’язку задачі про поширення плоскої хвилі в круглому циліндричному хвилеводі із сферичною порожниною.

### ВСТУП

Як відомо [1, 2], метод часткових областей широко й ефективно використовується при вивченні проблем, пов’язаних із випромінюванням і розсіюванням хвиль різноманітної природи. Основні результати, що досягнуті за допомогою цього методу, відносяться до тих випадків, коли суміжні області не перетинаються, тобто мають одну спільну межу. У іншому разі, традиційні способи його застосування можуть виявитися неефективними [3, 4]. Метою роботи є опис двох підходів, що дозволяють застосувати метод часткових областей у випадку, коли суміжні області перетинаються.

### 1. ПОСТАНОВКА ТА ПОБУДОВА РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Розглянемо хвилевід, що складається з двох напівнескінчених циліндричних труб з круговим перерізом, з’єднаних за допомогою сферичної порожнини (рис. 1). Хвилевід наповнений ідеальною стисливою рідиною, а всі його поверхні - акустично жорсткі. Введемо дві системи координат: циліндричну  $(x, R, \psi)$  і сферичну  $(r, \theta, \psi)$  із спільним початком в точці  $O$ .

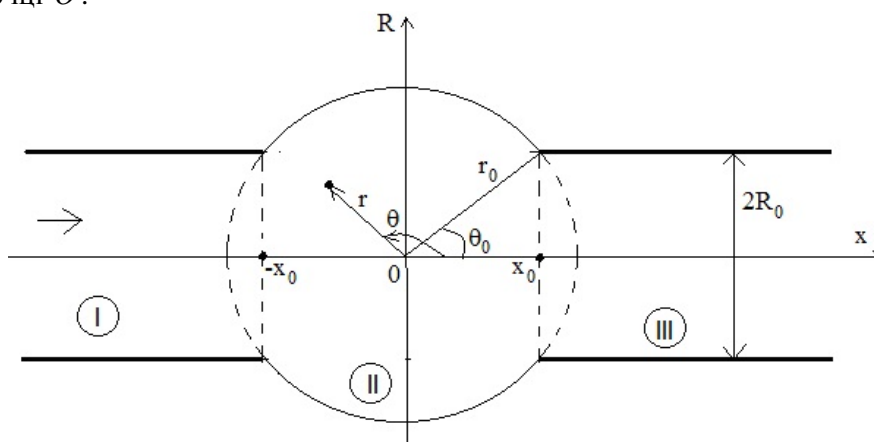


Рис. 1. Геометрія хвилевода.

Нехай зліва на порожнину набігає плоска гармонічна хвиля (тобто нульова мода циліндричного хвилевода) із частотою  $\omega$ . В такому випадку звукове поле матиме

радіальну симетрію, тобто не буде залежати від кутової координати  $\psi$ . Задача полягає у визначенні поля в хвилеводі. Часовий множник  $\exp(-i\omega t)$  не пишемо.

Відповідно до методу часткових областей вся область існування звукового поля ділиться на три часткові області. Область I – напівнескінченна труба  $-\infty < x \leq -x_0$ ; область II – сферична порожнина, і область III – напівнескінченна труба  $x_0 \leq x < \infty$ . Таке виділення часткових областей виглядає цілком природним, проте є одна особливість, яка не властива традиційному методу: часткові області перетинаються, і ця ситуація потребує нестандартного підходу до побудови розв’язку задачі. Тут можливі два варіанти.

При першому підході поле в області I запишемо у вигляді суперпозиції мод циліндричного хвилевода:

$$p_I = \exp(ik(x+x_0)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\beta_n R) \exp(-i\gamma_n(x+x_0)). \quad (1)$$

де  $\beta_n$  – корені рівняння  $J_0'(\beta R_0) = 0$ , стала поширення  $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}$ ,  $k = \omega/c$ . Перший доданок у формулі (1) – це біжуча плоска хвиля з амплітудою рівною одиниці. Другий доданок визначає відбиту від сферичної порожнини хвилю.

Поле в області III визначає хвилю, що пройшла крізь порожнину:

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_0(\beta_n R) \exp(i\gamma_n(x-x_0)). \quad (2)$$

Поле в області II представимо у вигляді суми мод сферичної порожнини:

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n(\cos\theta) \frac{j_n(kr)}{j_n'(kr_0)}. \quad (3)$$

Тут  $P_n(\cos\theta)$  – поліноми Лежандра,  $j_n(kr)$  – сферичні функції Бесселя.

Ідея побудови розв’язку полягає в тому, щоб повною мірою використати поля  $p_I$  і  $p_{II}$  в зоні перетину областей I, II, і поля  $p_{II}$  і  $p_{III}$  – в зоні перетину областей II, III. Для цього, як показано у роботі [3], умови спряження звукових полів слід записати у вигляді

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_I}{\partial x} + \alpha p_I = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{II}}{\partial x} + \alpha p_{II}, \quad x = -x_0, \quad R = [0, R_0], \quad (4)$$

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{II}}{\partial x} + \alpha p_{II} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{III}}{\partial x} + \alpha p_{III}, \quad x = x_0, \quad R = [0, R_0], \quad (5)$$

$$\frac{1}{i\omega\rho} b_1 \frac{\partial p_{II}}{\partial r} + b_2 p_{II} = \begin{cases} \frac{1}{i\omega\rho} b_1 \frac{\partial p_{III}}{\partial r} + b_2 p_{III}, & r = r_0, \quad \theta = [0, \theta_0], \\ 0, & r = r_0, \quad \theta = [\theta_0, \pi - \theta_0], \\ \frac{1}{i\omega\rho} b_1 \frac{\partial p_I}{\partial r} + b_2 p_I, & r = r_0, \quad \theta = [\pi - \theta_0, \pi]. \end{cases} \quad (6)$$

Тут  $b_1$  і  $b_2$  – дійсні константи, причому  $|b_1| + |b_2| \neq 0$ , а константа  $\alpha$  повинна бути комплексною. Нехай  $\alpha = ia$ , де  $a$  – дійсна константа [3]. Виходячи з того, що поверхня сфери акустично жорстка, треба покласти  $b_1 = 1$ , а  $b_2 = 0$ .

У другому варіанті розв’язання задачі змінимо геометрію часткових областей. Області I і III – так само напівнескінченні труби, і поля в них визначаються як і в першому варіанті. А область II – сферична порожнина за виключенням двох кульових

сегментів, що розташовуються всередині областей I і III. Поле в ній запишемо у вигляді суми двох доданків  $p_{II} = p_{II}^{(1)} + p_{II}^{(2)}$ :

$$p_{II}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\beta_n R) \exp(i\gamma_n(x+x_0)) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_0(\beta_n R) \exp(-i\gamma_n(x-x_0)), \quad (7)$$

$$p_{II}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n(\cos \theta) \frac{j_n(kr)}{j'_n(kr_0)}. \quad (8)$$

Перший доданок є сукупністю мод круглого циліндричного хвилевода, яка дозволить задовольнити умови спряження полів при  $x = \mp x_0$ . Другий доданок забезпечить виконання граничної умови на жорсткій поверхні сферичної порожнини. Оскільки центр сферичної системи координат знаходиться всередині області, то кутові функції у вигляді поліномів Лежандра мають бути із цілим індексом  $n$ . Проте фізична межа області II є тільки частиною сфери. Тому, для можливості реалізувати властивості повноти та ортогональності набору функцій  $P_n(\cos \theta)$  треба продовжити граничні умови на ділянки межі сфери, що розташовані всередині областей I і III. При цьому, граничні умови ми продовжуємо тільки для другого доданку  $p_{II}^{(2)}$ . Функція, що задає граничні умови на “нефізичних” ділянках межі в принципі може бути вибрана довільно [2]. Оскільки поверхня сферичної порожнини акустично жорстка, то виберемо продовження граничної умови у вигляді рівності нулю похідної по радіальній координаті від функції  $p_{II}^{(2)}$ .

Таким чином, умови спряження звукових полів на межах часткових областей і граничну умову на поверхні порожнини треба записати у такому вигляді:

$$p_I = p_{II}, \quad x = -x_0, \quad R = [0, R_0], \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_I}{\partial x} = \frac{\partial p_{II}}{\partial x}, \quad x = -x_0, \quad R = [0, R_0], \quad (10)$$

$$p_{II} = p_{III}, \quad x = x_0, \quad R = [0, R_0], \quad (11)$$

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x} = \frac{\partial p_{III}}{\partial x}, \quad x = x_0, \quad R = [0, R_0], \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{II}}{\partial r} = 0, & r = r_0, \quad \theta = [\theta_0, \pi - \theta_0], \\ \frac{\partial p_{II}^{(2)}}{\partial r} = 0, & r = r_0, \quad \theta = [0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi]. \end{cases} \quad (13)$$

Далі йде стандартна процедура переходу від функціональної системи до системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду [1]. При цьому використовуються властивості ортогональності відповідного набору функцій. Системи рівнянь розв’язувались методом редукції.

Порівняльною оцінкою ефективності запропонованих підходів природно вибрати якість виконання закону збереження енергії, тобто наскільки точно виконується умова рівності одиниці суми енергетичних коефіцієнтів відбиття і проникнення плоскої хвилі при її падінні на сферичну порожнину. Під енергетичними коефіцієнтами відбиття та проникнення, відповідно, будемо розуміти відношення середнього потоку потужності відбитої та прониклої хвиль до середнього потоку потужності падаючої плоскої хвилі:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 (J_0(\beta_n R_0))^2 \operatorname{Re}(\gamma_n), \quad W = \sum_{n=0}^{\infty} |B_n|^2 (J_0(\beta_n R_0))^2 \operatorname{Re}(\gamma_n). \quad (14)$$

## 2. АНАЛІЗ ЧИСЕЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо спочатку результати розрахунків, що відповідають першому варіанту розв'язання задачі. Тут в системі рівнянь присутня невизначена стала  $a$ . Проведені розрахунки показали, що при виборі її значення більшим за 1 величина суми енергетичних коефіцієнтів практично не залежить від значення сталої  $a$ , і якість виконання закону збереження енергії є високою. При розв'язанні системи рівнянь у циліндричній трубі взято 20 мод, а в сферичній порожнині – 50 мод,  $a = 100$ .

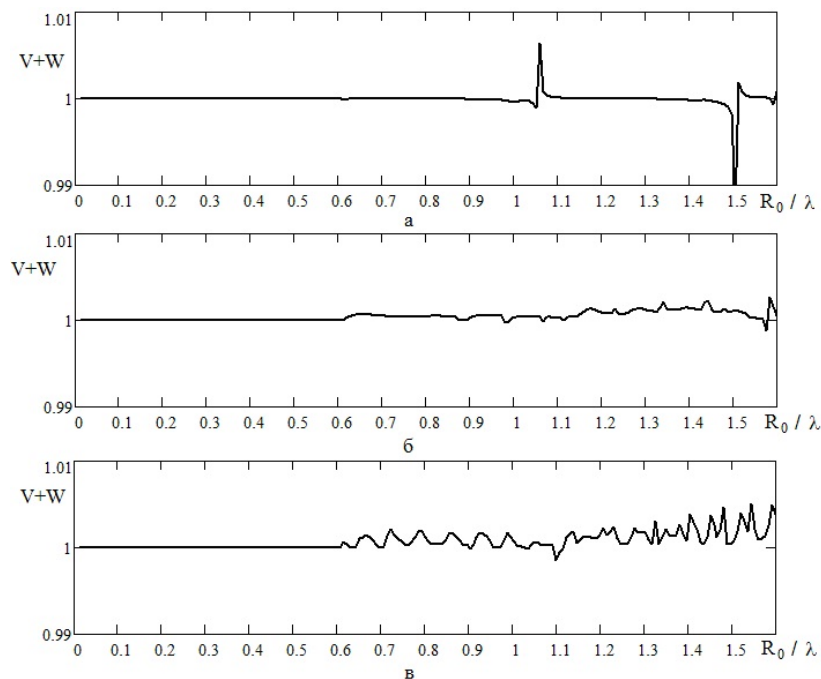


Рис. 2. Частотні залежності  $V + W$  (варіант 1): а –  $r_0 / R_0 = 1.2$ , б –  $r_0 / R_0 = 2$ , в –  $r_0 / R_0 = 3$ .

На рис. 2 зображені частотні залежності суми енергетичних коефіцієнтів як функції величини хвильового радіуса труби для трьох варіантів відношення радіусів сферичної порожнини і труби. Під хвильовим радіусом маємо на увазі відношення радіусу труби до довжини хвилі. Як видно, якість виконання закону збереження енергії достатньо висока, навіть при відносно великій величині відношення радіусів труби і порожнини і значному хвильовому радіусі труби. Проте можна говорити про два інтервали зміни величини хвильового радіусу. На першому, де він менший 0.61, точність виконання закону збереження енергії дуже висока. Тут у циліндричному хвилеводі однорідною є тільки нульова мода, що є плоскою хвилею. При хвильовому радіусі труби, більшому за 0.61, окрім нульової моди, послідовно стають однорідними вищі моди циліндричного хвилевода. Тут якість виконання закону збереження енергії трохи гірша, що пояснюється більш складною структурою поля в хвилеводі.

Тепер звернемося до результатів аналогічних розрахунків відповідно до другого варіанту розв'язання задачі. На рис. 3 зображені частотні залежності суми енергетичних коефіцієнтів при тих же параметрах, що і в попередньому випадку. Як видно, якість виконання закону збереження значно погіршилась, особливо варто відмітити наявність сильних викидів в частотній характеристиці на деяких частотах.

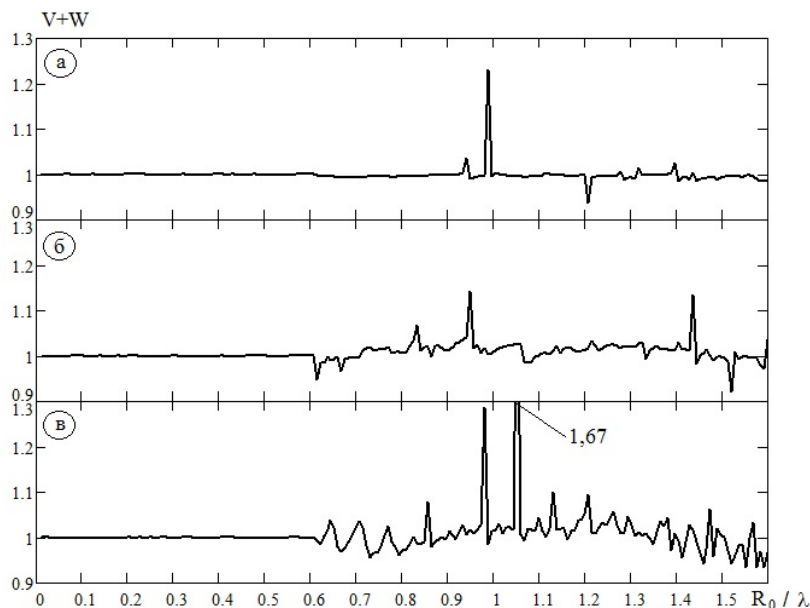


Рис. 3. Частотні залежності  $V+W$  (варіант 1): а –  $r_0/R_0 = 1.2$ , б –  $r_0/R_0 = 2$ , в –  $r_0/R_0 = 3$ .

Можна припустити, що це пов’язано із особливостями задання граничних умов на “нефізичних” ділянках межі. Нагадаємо, що у другому варіанті область II – це сферична порожнина за винятком двох кульових сегментів, що розташовуються всередині областей I і III. На сферичних поверхнях цих сегментів ми продовжували граничні умови у вигляді рівності нулю похідної по радіальній координаті від функції  $p_{II}^{(2)}$ , яка є частиною загального розв’язку для області II. Саме похідна від загального розв’язку на жорсткій поверхні сферичної порожнини рівна нулю, тому похідна від  $p_{II}^{(2)}$  на цій поверхні відмінна від нуля. Звідси продовження граничної умови на нефізичну поверхню як це було зроблено раніше призводить до стрибка похідної від  $p_{II}^{(2)}$ .

Спробуємо зменшити цей стрибок, спираючись на наступні міркування. Тиск і радіальна коливальна швидкість в гармонічній хвилі зв’язані між собою за допомогою питомого акустичного опору середовища  $\zeta$ , а саме  $\frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p}{\partial(kr)} = \frac{p}{\zeta}$ . Звісно, його величину

в звуковому полі хвилевода ми не знаємо. Проте можна покласти, що воно пропорційне добутку густини середовища на швидкість звуку в ньому з деяким коефіцієнтом, тобто  $\zeta = \rho c / \beta$ . Приймаючи до уваги сказане, перепишемо умову (13) в такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{II}}{\partial r} = 0, & r = r_0, \quad \theta = [\theta_0, \pi - \theta_0], \\ \frac{\partial p_{II}^{(2)}}{\partial(kr)} = i \cdot \beta p_{II}^{(2)}, & r = r_0, \quad \theta = [0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi]. \end{cases} \quad (15)$$

Експериментально показано, що для даної задачі оптимальна величина коефіцієнта  $\beta$  в полі дійсних чисел знаходиться в межах значення 0.1. Розрахунки суми енергетичних коефіцієнтів у цьому випадку представлені на рис. 4. По-перше, в частотній характеристиці зникли сильні викиди. А по-друге, у всьому частотному діапазоні якість виконання закону збереження енергії не погіршилась.

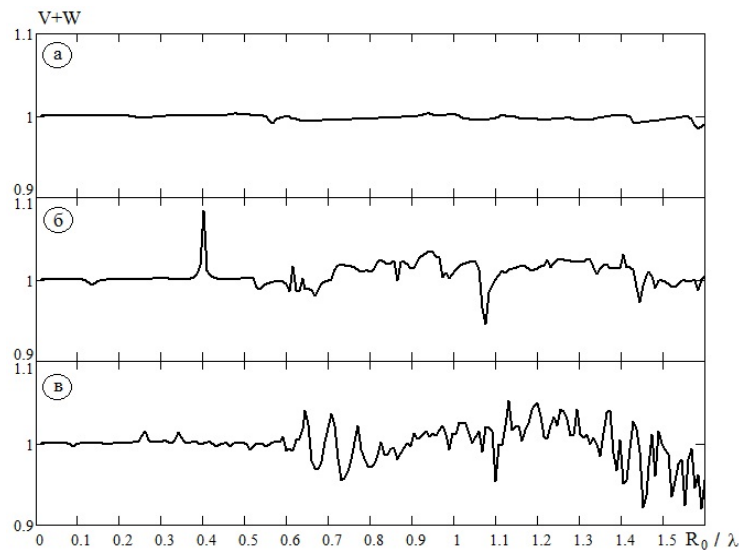


Рис. 4. Частотні залежності  $V + W$  ( $\beta = 0.1$ ): а –  $r_0 / R_0 = 1.2$ , б –  $r_0 / R_0 = 2$ , в –  $r_0 / R_0 = 3$ .

Проте, аналізуючи проведені розрахунки, можна сказати, що при використанні методу часткових областей в хвильових задачах, де має місце перетин часткових областей, більш перспективним є перший варіант розв'язання задачі. В той же час другий варіант буде незамінним в задачах, де часткові області не перетинаються, але продовження граничних умов на нефізичну межу необхідне для забезпечення можливості використання повноти і ортогональності відповідного набору функцій. Прикладом може бути задача про випромінювання звуку системою циліндрів, що перетинаються [2].

## ВИСНОВКИ

В межах методу часткових областей, проведено порівняльний аналіз двох підходів до розв'язання задачі про поширення плоскої хвилі в круглому хвилеводі із сферичною порожниною. Показано, що у випадках, коли часткові області перетинаються, більш перспективним є підхід, при якому в повній мірі використовуються поля в зоні перетину. Підхід, при якому використовується продовження граничних умов є незамінним, коли граничні умови продовжуються на нефізичні ділянки межі, що розташовані поза межами існування звукового поля. Показано, що раціональний вибір граничних умов на нефізичних межах може суттєво покращити якість виконання закону збереження енергії.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Вовк. И. В., Мацыпура В. Т. Волновые задачи акустики. – К.: ИНТЕРСЕРВИС, 2013. – 572 с.
2. Гринченко В. Т. Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика. – 1996. – **70**. – С. 27–40.
3. Вовк. И. В., Гомилко А. М., Городецкая Н. С. Об особенностях применения метода частичных областей в волновых задачах // Акустический журнал. – 1995. – **41**, № 3 – С. 399–404.
4. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Митры Р. – М.: Мир, 1977. – 485 с.