ФУНКЦІЯ ГРІНА ТРИВИМІРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПРЯМОГО ПОРОЖНИННОГО ЦИЛІНДРА

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України,
вул. Желябова, 8/4, 03680 Київ-180 МСП
Тел. (+38-044) 453-26-55   E-mail: aobor@ukr.net

Green's function of the three-dimensional convective wave equation for an infinite straight hollow cylinder of arbitrary (but constant along its length) cross-sectional shape and area, having either acoustically rigid or acoustically soft walls or the walls of a mixed type, is obtained. This function is represented by a series of the cylinder acoustic modes. Each term of the series is a superposition of the direct and reverse waves propagating in the corresponding mode downstream and upstream of acoustic source, respectively. In the found Green's function, the effects of a uniform mean flow in the cylinder are directly reflected. The effects become more significant as the flow Mach number increases, causing, in particular, the appearance and further growth of the function asymmetry about the cylinder cross-section in which the noted source is located, and vice versa. In the case of flow absence, the obtained Green's function is symmetric about the noted cross-section. A transformation is suggested that allows one to reduce the one-dimensional convective Klein-Gordon equation to its classical counterpart, and, proceed from the known solution of the later equation, obtain a solution to the former one.

ВСТУП

Дослідження закономірностей генерації та поширення звуку в порожнинних циліндрах різних геометрій є актуальним в архітектурі, медицині, нафтогазовій промисловості, комунальному господарстві тощо [1–4]. Незалежно від типу циліндричних конструкцій і акустичних джерел у них, такі дослідження в принципі можуть бути проведені на основі методу функцій Гріна. Проте його застосування є доцільним лише за умови існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна.

Окрім іншого, така можливість залежить від геометрії досліджуваної конструкції та форми її поперечного перерізу, фізичних властивостей її стінок та умов її закріплення, фізичних властивостей зовнішнього та внутрішнього середовища, акустичних умов на кінцях та наявності або відсутність течії в ній тощо. Як засвідчує аналіз наукової літератури, з-поміж конструкцій, геометрія та фізичні властивості яких визначаються різними комбінаціями цих факторів, найбільш дослідженими є нескінченні прямі жорсткостінні порожнинні циліндри кругової та прямокутної форм поперечного перерізу [1–4]. Для них було побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца, а також, з їхньою допомогою, було одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами у зазначених конструкціях. Проте всі ці результати зазвичай обмежувалися випадком відсутності внутрішньої течії. Якщо ж наявність течії і бралася до уваги, то її ефекти у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявлялися лише у неявному вигляді [1–4].

Цей недолік було частково виправлено у роботах [5, 6]. Там було побудовано функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца для прямого жорсткостінного порожнинного циліндра кругового поперечного перерізу із внутрішньою течією [5], а також функцію Гріна хвильового рівняння для циліндра прямокутного поперечного перерізу з таким же типом стінок і такою ж течією [6]. У цих функціях, окрім іншого, вже у явному вигляді були відображені ефекти зазначеної течії.

У даному дослідженні далі розвиваються результати робіт [5, 6] на випадок прямого порожнинного циліндра довільної (але незмінної по його довжині) форми поперечного перерізу з акустично жорсткими, або акустично м’якими стінками, або ж зі стінками змішаного типу. Одержані при цьому результати мають явну залежність від параметрів течії в циліндрі.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На рис. 1 зображено нескінченний прямий порожнинний циліндр довільної (але незмінної по його довжині) форми та площі поперечного перерізу (тут мається на увазі така форма поперечного перерізу циліндра і такий тип його стінок, для яких можна знайти його акустичні моди). Його стінки є акустично жорсткими, або акустично м’якими, або ж якась їх частина є акустично жорсткою, а інша – акустично м’якою. У цьому циліндрі задано рівномірну осереднену течію рідини зі швидкістю U в напрямку твірної його стінки, а також як завгодно розташовані акустичні джерела різної природи. Останні генерують в циліндрі акустичне поле, котре описується тривимірним *конвективним* хвильовим рівнянням [4-6]:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 p_a}{\mathrm{d}t^2} - \nabla^2 p_a = \gamma\,, \qquad (x_1, x_2) \in A\,, \qquad |x_3| < \infty\,, \qquad |t| < \infty\,, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2}{\partial t \partial x_3} + U^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\,,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\mathrm{h}_1\mathrm{h}_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\mathrm{h}_2}{\mathrm{h}_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mathrm{h}_1}{\mathrm{h}_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \mathrm{h}_1\mathrm{h}_2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right].$$

Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для цього циліндра.

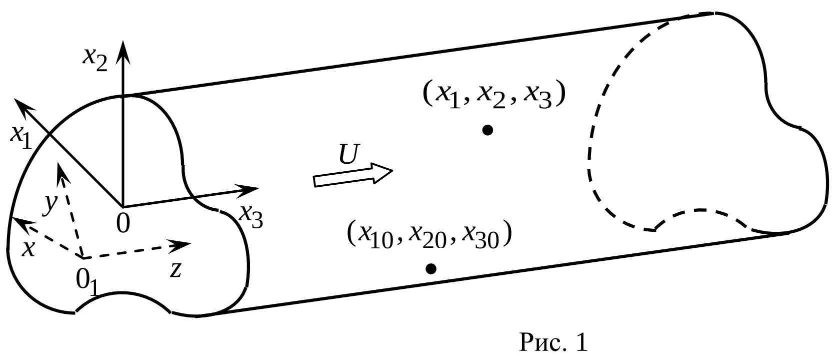

Рис. 1

У рівнянні (1) c_0 - швидкість звуку в незбуреній рідині; p_a - акустичний тиск; t - час; γ задає сумарний розподіл зазначених джерел; x_1, x_2, x_3 - ортогональні координати з віссю x_3 уздовж течії; A - поперечний переріз циліндра площею $|A|$; h_i ($i = 1, 2, 3$) - коефіцієнти Ляме:

$$\mathrm{h}_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}, \quad \mathrm{h}_1=\mathrm{h}_1(x_1,x_2), \quad \mathrm{h}_2=\mathrm{h}_2(x_1,x_2), \quad \mathrm{h}_3=1;$$

x, y, z - прямокутні координати, вибрані таким чином, що їх початок лежить у тому ж поперечному перерізі циліндра, що і початок системи координат (x_1,x_2,x_3), а вісь z співнаправлена з віссю x_3.

2. РІВНЯННЯ ТА УМОВИ, ЯКИМ ЗАДОВОЛЬНЯЄ ФУНКЦІЯ ГРІНА

Шукана функція Гріна G описує акустичний тиск у довільній точці циліндра (x_1,x_2,x_3) в момент часу t, який генерується в момент t_0 одиничним точковим імпульсним акустичним джерелом у циліндрі в точці (x_{10},x_{20},x_{30}). Вона задовольняє рівняння

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{G}}{\mathrm{d}t^2}-\nabla^2\mathrm{G}=\frac{1}{\mathrm{h}_1\mathrm{h}_2}\delta\left(x_1-x_{10}\right)\delta\left(x_2-x_{20}\right)\delta\left(x_3-x_{30}\right)\delta\left(t-t_0\right), \tag{2}$$

в якому $\delta(\ldots)$ – дельта-функція Дірака, $\vec{r}=x_i\vec{e}_i$ і $\vec{r}_0=x_{i0}\vec{e}_i$ - радіус-вектори відповідно точки поля і зазначеного джерела, $\vec{e}_i$ - орт осі x_i; а також передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

Граничні умови для функції G відображають: відсутність нормальної компоненти акустичної швидкості на поверхні циліндра S (у разі акустично жорсткої його стінки):

$$\left.\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}\right|_S=0 \tag{3}$$

(де $\vec{n}$ - зовнішня нормаль до S), або рівність нулеві акустичного тиску на S (у разі акустично м’якої стінки):

$$\left.\mathrm{G}\right|_S=0, \tag{4}$$

або ж (у разі акустичної жорсткості якоїсь частини стінки циліндра (наприклад, S_1) і акустичної м’якості решти його стінки ($S_2=S-S_1$)) відсутність зазначених характеристик акустичного поля на цих частинах поверхні S:

$$\left.\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}\right|_{S_1}=0, \quad \left.\mathrm{G}\right|_{S_2}=0. \tag{5}$$

Крім цього, не повинно бути як відбиття звуку на кінцях циліндра, так і акустичного поля в усьому циліндрі до початку його генерації вищезазначеним джерелом:

$$\left.G\right|_{t<t_0}=0, \tag{6}$$

а також повинен виконуватися принцип взаємності [4-6]:

$$\mathrm{G}(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0)=\mathrm{G}(\vec{r}_0,-t_0;\vec{r},-t). \tag{7}$$

3. ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ ГРІНА ТА ЇЇ АНАЛІЗ

Розв’язок задачі (2)-(7) шукатимемо у вигляді ряду по акустичних модах циліндра Ψ_{nm}:

$$G(x_1,x_2,x_3,t;x_{10},x_{20},x_{30},t_0)=\sum_n \sum_m G_{nm}(x_3,t;x_{10},x_{20},x_{30},t_0)\Psi_{nm}(x_1,x_2). \tag{8}$$

Ці моди задовольняють рівняння

$$\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\Psi_{nm}}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\Psi_{nm}}{\partial x_2}\right)\right]=-k_{nm}^2\Psi_{nm}, \tag{9}$$

(в якому k_{nm} - модальні хвильові числа у перерізі A), залежно від типу стінок циліндра - одну із граничних умов (3) –(5), і, згідно з постановкою задачі, можуть бути знайдені аналітично або чисельно. Їхня ж кількість (а відтак, і межі сум у (8)) залежить від форми поперечного перерізу циліндра і типу його стінок.

У (8) невідомими є коефіцієнти G_{nm}. Для їх визначення підставимо ряд (8) у рівняння (2), помножимо одержаний при цьому вираз скалярно на моди Ψ_{nm}, а також врахуємо ортогональність функцій Ψ_{nm}:

$$\iint_A \Psi_{nm}(x_1,x_2)\Psi_{sq}(x_1,x_2)\mathrm{dA}=\begin{cases}\|\Psi_{nm}\|^2;(s,q)=(n,m);\\ \\ 0;(s,q)\neq(n,m);\end{cases} \tag{10}$$

$$\|\Psi_{nm}\|^2=\iint_A \Psi_{nm}^2(x_1,x_2)\mathrm{dA}; \qquad dA=h_1h_2dx_1dx_2$$

і співвідношення (9). Послідовність таких операцій приводить до одновимірного конвективного рівняння Кляйна-Гордона для G_{nm} [5, 6]:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial t^2}+2\frac{M}{c_0}\frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial t\partial x_3}-\left(1-M^2\right)\frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial x_3^2}+k_{nm}^2G_{nm}=$$

$$=\frac{\Psi_{nm}(x_{10},x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2}\delta(x_3-x_{30})\delta(t-t_0), \tag{11}$$

в якому $M=U/c_0$ - число Маха течії в циліндрі.

Подальше введення нових безрозмірних змінних:

$$X_3=\frac{\lambda x_3}{l},\quad X_{30}=\frac{\lambda x_{30}}{l},\quad T=\lambda^{-1}\frac{c_0t}{l}+M\frac{\lambda x_3}{l},$$

$$T_0=\lambda^{-1}\frac{c_0t_0}{l}+M\frac{\lambda x_{30}}{l},\quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \tag{12}$$

(де l - масштаб довжини, вибір якого пояснюється після (15)) дозволяє позбутися у рівнянні (11) доданків, які містять число Маха і переписати його у класичному вигляді [5]:

$$\frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial T^2}-\frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial X_3^2}+k_{nm}^2l^2G_{nm}=$$

$$=l^2\frac{\Psi_{nm}(x_{10},x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2}\delta\left(\frac{l}{\lambda}(X_3-X_{30})\right)\delta\left(\frac{\lambda l}{c_0}(T-T_0-M(X_3-X_{30}))\right) \tag{13}$$

в області

$$\left|X_3\right| < \infty, \qquad \left|X_{30}\right| < \infty, \qquad \left|T\right| < \infty, \qquad \left|T_0\right| < \infty.$$

Розв'язком класичного рівняння Кляйна-Гордона (13) у вказаній області є суперпозиція прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вправо та вліво від імпульсного джерела, розташованого у точці $X_3 = X_{30}$ [5, 6]:

$$\mathrm{G}_{nm} = \frac{c_0}{2}\frac{\Psi_{nm}\left(x_{10}, x_{20}\right)}{\left\|\Psi_{nm}\right\|^2}\Big[\mathrm{H}\left(X_{30} - X_3\right)\mathrm{H}\left(T - T_0 + X_3 - X_{30}\right) +$$
$$+\mathrm{H}\left(X_3 - X_{30}\right)\mathrm{H}\left(T - T_0 - (X_3 - X_{30})\right)\Big]\mathrm{J}_0\left(k_{nm} l\sqrt{(T - T_0)^2 - (X_3 - X_{30})^2}\right). \tag{14}$$

Тут H(...) - функція Хевісайда, $\mathrm{J}_0(...)$ - циліндрична функція Бесселя першого роду порядку 0, а також було взято до уваги умову випромінювання у нескінченність, яку має задовольняти функція G .

Тоді підстановка (12) у (14) дає остаточні вирази для G_{nm} у представленні (8):

$$\mathrm{G}_{nm} = \frac{c_0}{2}\frac{\Psi_{nm}\left(x_{10}, x_{20}\right)}{\left\|\Psi_{nm}\right\|^2}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{l}(x_{30} - x_3)\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) +\right.$$
$$\left. + \mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right)\right] \times$$
$$\times \mathrm{J}_0\left(k_{nm} l\sqrt{\frac{c_0^2}{\lambda^2 l^2}(t - t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{l^2}(t - t_0)(x_3 - x_{30}) + (M^2 - 1)\frac{\lambda^2}{l^2}(x_3 - x_{30})^2}\right). \tag{15}$$

Бачимо, що параметр l не впливає на значення жодної з функцій у (15), а відтак і на значення як самих коефіцієнтів G_{nm}, так і функції Гріна (8) (бо Ψ_{nm}, $\left\|\Psi_{nm}\right\|^2$ і J_0 у (15) взагалі не залежать від l, а знаки аргументів усіх функцій Хевісайда в (15) не залежать від значення $l > 0$). Це вказує на те, що масштаб l у (12) можна вибирати довільним чином.

Наявність (15) дозволяє на основі (8) записати вираз для функції G :

$$\mathrm{G}(x_1, x_2, x_3, t; x_{10}, x_{20}, x_{30}, t_0) = \frac{c_0}{2}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{l}(x_{30} - x_3)\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) +\right.$$
$$\left. +\mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right)\right] \times$$
$$\times \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}\left(x_{10}, x_{20}\right)}{\left\|\Psi_{nm}\right\|^2}\Psi_{nm}\left(x_1, x_2\right)\mathrm{J}_0\left(k_{nm} l\sqrt{\xi}\right), \tag{16}$$

де

$$\xi = \frac{c_0^2}{\lambda^2 l^2}(t - t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{l^2}(t - t_0)(x_3 - x_{30}) + (M^2 - 1)\frac{\lambda^2}{l^2}(x_3 - x_{30})^2.$$

Бачимо, що функція Гріна (16) представляється рядом по акустичних модах циліндра Ψ_{nm}. Кожен член цього ряду є сумою прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вниз та вгору за течією від акустичного джерела, розташованого у перерізі циліндра $x_3 = x_{30}$. Крім цього, функція (16) задовольняє умову причинності (6) і принцип взаємності (7), а також одну із граничних умов (3)-(5) та умову випромінювання у нескінченність.

Подальший аналіз виразу (16) засвідчує, що в одержаній функції Гріна через числа M і λ відображені ефекти досліджуваної течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням M, зумовлюючи, окрім іншого, появу і подальше збільшення асиметрії функції G відносно перерізу $x_3 = x_{30}$, в якому розташоване зазначене джерело, і навпаки. У випадку ж відсутності течії функція (16) стає симетричною відносно перерізу $x_3 = x_{30}$.

ВИСНОВКИ

1. Побудовано функцію Гріна G тривимірного конвективного хвильового рівняння для нескінченного прямого порожнинного циліндра довільної (але незмінної по його довжині) форми та площі поперечного перерізу з акустично жорсткими і акустично м’якими стінками, а також зі стінками змішаного типу.
2. Ця функція представляється рядом по акустичних модах циліндра. Кожен член ряду є суперпозицією прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді відповідно вниз та вгору за течією від акустичного джерела.
3. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти рівномірної осередненої течії в циліндрі. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції G відносно перерізу циліндра $x_3 = x_{30}$, в якому розташоване зазначене джерело, і навпаки. У випадку ж відсутності течії функція G є симетричною відносно перерізу $x_3 = x_{30}$.
4. У процесі побудови функції Гріна запропоновано перетворення (12), котре дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Кляйна-Гордона (11) до його класичного аналогу (13), і, на основі відомого розв’язку останнього, одержувати розв’язок першого рівняння.
5. Запропонований у даній роботі підхід створює основи для подальшого розроблення аналітичних методів кількісного знаходження характеристик акустичних полів у каналах з нерегулярною геометрією і внутрішньою течією.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Berger S. A., Jou L.-D.* Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2000. – **32**. - P.347-382.
2. *Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С.* Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гідромех. – 2009. – **11**, №4. – С.17-30.
3. *Howe M. S.* Acoustics of fluid-structure interactions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.
4. *Грінченко В. Т., Вовк І. В., Маципура В. Т.* Основи акустики. – К.: Наук. думка, 2007. – 640 с.
5. *Борисюк А. О.* Функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією // Акуст. вісн. – 2011. – **14**, №4. – С. 9-17.
6. *Borisyuk A. O.* Green’s function of the convective wave equation for a rigid rectangular pipe // *Наукоємні технології* – 2014. – **№3** (**23**). - С. 374-378.