

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ КУЛІ В АКУСТИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

О. І. БЕЗВЕРХИЙ, Л. О. ГРИГОР'ЄВА

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
e-mail: l_grigoryeva@ukr.net*

Дана робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання і аналізу впливу імпедансного контакту з акустичним середовищем на нестационарні коливання порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при електричних динамічних збуреннях.

ВСТУП

П'єзокерамічні елементи конструкцій сферичної форми є типовими активними компонентами багатьох пристроїв і широко застосовуються в приладобудуванні, гідроакустиці, електроакустиці, ультразвуковій технології [1, 6 та ін.]. Для забезпечення надійності і вибору оптимальних умов функціонування електромеханічних випромінювачів необхідне вивчення динамічного електромеханічного стану тіла з урахуванням впливу зовнішнього середовища. В [4, 7, 8] виконано визначення власних частот і форм для електропружних порожнистих циліндрів і сфер. Нестационарні коливання п'єзокерамічної сферичної оболонки проаналізовані в [5]. Дослідження пружноелектричних нестационарних коливань п'єзокерамічних сфер і циліндрів при електричних збуреннях проводилося в статтях [2, 5, 7, 8].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Колівання п'єзокерамічної кулі з радіусом серединної поверхні R і товщиною стінки $2h$ описуються рівняннями

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + 2 \frac{D_r}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} = c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{11}^E + c_{21}^E) \frac{u}{r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r};$$

$$D_r = e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + 2e_{13} \frac{u}{r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (2)$$

Початкові умови накладаються на переміщення та їх швидкості

$$u(r, t=0) = u^0(r); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, t=0) = u^1(r). \quad (3)$$

Для наближеного врахування впливу зовнішнього середовища на деформування кулі механічні граничні умови при $r_0 = R - h$, $r_1 = R + h$ прийmemo в вигляді імпедансних співвідношень, де z_i - питомий акустичний опір

$$\sigma_{rr}(r_i, t) + z_i \frac{\partial u}{\partial t}(r_i, t) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (4)$$

Коливання кулі збудуються електричним потенціалом

$$\varphi(R \pm h, t) = \pm V(t). \quad (5)$$

Після введення безрозмірних величин

$$r = R + x, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}, \quad \bar{u} = \frac{u}{h}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}, \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}, \quad (6)$$

$$\bar{D}_i = \frac{D_i}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{00}}, \quad \bar{z}_i = \frac{z_i}{\sqrt{c_{00} \rho_{00}}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{t_h}$$

де $\rho_{00} = \rho$, $c_{00} = c_{33}^E$, $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{33}^S$, $t_h = h \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$, $\varepsilon = \frac{h}{R}$ [3, 8] в рівняннях (1-5) виконується перехід від диференціальних рівнянь до різницьових виразів, які записуються в точках розбиття інтервалу $(R - h, R + h)$.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ

В інтервалі інтегрування $x \in [-1, 1]$ вводиться розбиття Ω

$$\Omega = \{x_i = (i - 0.5)\Delta x - 1; \quad i = 0, 1, \dots, n + 1; \quad \Delta x = 2/n\}. \quad (7)$$

Механічні переміщення і електричний потенціал будемо шукати в вузлах розбиття, а механічні напруження і електричну індукцію - в центрах відрізків розбиття. Різницьова форма рівнянь електропружності (1) записується в внутрішніх точках розбиття і приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = & \left(\frac{c_{33}}{\Delta x^2} + \frac{c_{33} \xi_i}{\Delta x} \right) u_{i+1} + (2c_{33} \xi_i^2 [c_{13} - c_{11} - c_{12}] - 2 \frac{c_{33}}{\Delta x^2}) u_i + \left(\frac{c_{33}}{\Delta x^2} - \frac{c_{33} \xi_i}{\Delta x} \right) u_{i-1} + \\ & + \left(\frac{e_{33}}{\Delta x^2} + (e_{33} - e_{31}) \frac{\xi_i}{\Delta x} \right) \varphi_{i+1} - 2 \frac{e_{33}}{\Delta x^2} \varphi_i + \left(\frac{e_{33}}{\Delta x^2} - (e_{33} - e_{31}) \frac{\xi_i}{\Delta x} \right) \varphi_{i-1}; \\ & \left(\frac{e_{33}}{\Delta x^2} + (e_{31} + e_{33}) \frac{\xi_i}{\Delta x} \right) u_{i+1} + (2e_{31} \xi_i^2 - 2 \frac{e_{33}}{\Delta x^2}) u_i + \left(\frac{e_{33}}{\Delta x^2} - 2(e_{31} + \right. \\ & \left. + e_{33}) \frac{\xi_i}{2\Delta x} \right) u_{i-1} + \left(-\frac{\varepsilon_{33} \xi_i}{\Delta x} - \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i+1} + 2 \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta x^2} \varphi_i + \left(\frac{\varepsilon_{33} \xi_i}{\Delta x} - \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i-1} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\xi_i = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_i}$, $\varepsilon = \frac{h}{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Механічні напруження і електричну індукцію (2) шукаємо в центрах ділянок розбиття:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{i+0.5}^{rr} &= \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13}\xi_{i+0.5}\right)u_{i+1} + \left(-\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13}\xi_{i+0.5}\right)u_i + \frac{e_{33}}{\Delta x}(\varphi_{i+1} - \varphi_i); \\
 \sigma_{i+0.5}^{\theta\theta} &= \left(\frac{c_{13}}{\Delta x} + 2[c_{11} - (c_{11} - c_{23})]\frac{\xi_{i+0.5}}{4}\right)u_{i+1} + \\
 &+ \left(-\frac{c_{13}}{\Delta x} + 2[c_{11} - (c_{11} - c_{23})]\frac{\xi_{i+0.5}}{4}\right)u_i + \frac{e_{31}}{\Delta x}(\varphi_{i+1} - \varphi_i); \\
 D_r &= \left(\frac{e_{33}}{\Delta x} + e_{31}\xi_{i+0.5}\right)u_{i+1} + \left(-\frac{e_{33}}{\Delta x} + e_{31}\xi_{i+0.5}\right)u_i - \frac{e_{33}}{\Delta x}(\varphi_{i+1} - \varphi_i). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Значення переміщень і електричного потенціалу в законтурних точках розбиття включаються з рівнянь (8) з допомогою різницевої форми граничних умов (4), записаних в точках поверхні тіла з другим порядком точності

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} &= -V(t); & \frac{\varphi_{n+1} + \varphi_n}{2} &= V(t); \\
 \sigma_{0.5}^{rrk} + z_0 \frac{\partial u}{\partial t}(r_0, t_k) &= \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13}\xi_{0.5}\right)u_1^k + \left(-\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13}\xi_{0.5}\right)u_0^k + \frac{e_{33}}{\Delta x}(\varphi_1^k - \varphi_0^k) + \\
 &+ \frac{z_0}{2\Delta t}(u_1^k + u_0^k - u_1^{k-1} - u_0^{k-1}) = 0; \\
 \sigma_{n+0.5}^{rrk} + z_1 \frac{\partial u}{\partial t}(r_1, t_k) &= \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13}\xi_{n+0.5}\right)u_{n+1}^k + \left(-\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13}\xi_{n+0.5}\right)u_n^k + \\
 &+ \frac{e_{33}}{\Delta x}(\varphi_{n+1}^k - \varphi_n^k) + \frac{z_0}{2\Delta t}(u_{n+1}^k + u_n^k - u_{n+1}^{k-1} - u_n^{k-1}) = 0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Отримуємо наступні вирази для визначення переміщень і електричного потенціалу в законтурних точках розбиття при граничних умовах (10):

$$\begin{aligned}
 \varphi_0 &= -\varphi_1 - 2V(t); & \varphi_{n+1} &= -\varphi_n + 2V(t); \\
 u_0 &= -\left(-\frac{c_{33}}{\Delta x} + N\frac{c_{13}\xi_{0.5}}{2} + \frac{z_0}{2\Delta t}\right)^{-1} \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + N\frac{c_{13}\xi_{0.5}}{2} + \frac{z_0}{2\Delta t}\right)u_1 + 2\frac{e_{33}}{\Delta x}(\varphi_1 + V(t)) + \frac{z_0}{2\Delta t}(u_1^{k-1} + u_0^{k-1}); \\
 u_{n+1} &= -\left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + N\frac{c_{13}\xi_{n+0.5}}{2} + \frac{z_0}{2\Delta t}\right)^{-1} \left(-\frac{c_{33}}{\Delta x} + N\frac{c_{13}\xi_{n+0.5}}{2} + \frac{z_0}{2\Delta t}\right)u_n + \\
 &+ 2\frac{e_{33}}{\Delta x}(V(t) - \varphi_n) + \frac{z_0}{2\Delta t}(u_{n+1}^{k-1} + u_n^{k-1}). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему рівнянь отримуємо шляхом підстановки в (8) співвідношень (11).

Для інтегрування системи рівнянь (8) по часу вводиться розбиття

$$\omega_t = \{t_k = k\Delta t; k = 1, 2, \dots, p; \Delta t = T/p\}. \quad (11)$$

Інтегрування по часу проводиться з допомогою явної схеми або неявної схеми Ньюмарка [3].

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ І ВИСНОВКИ

Чисельні результати отримано при значеннях питомого акустичного опору $z_0 = 0$, $z_1 = \rho_a c_a$. Електричне збурення задається в вигляді $V(t) = V_0 H(t) \sin \omega t$, де $H(t)$ – функція Хевісайда. Матеріал – PZT-4. Розглянемо випадок, коли порожниста п'єзокерамічна куля знаходиться у воді, питомий акустичний опір якої $z_1 = 150 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с} / \text{м}$. Для повітря вважаємо $z_0 = 0$.

При переході до безрозмірних змінних маємо

$$\bar{z}_1 = \frac{z_1}{\sqrt{c_{33}^E \rho}} = \frac{150 \cdot 10^4}{\sqrt{11,5 \cdot 10^{10} \cdot 7500}} = 0,05.$$

Для радіально поляризованої кулі з параметром кривизни $\varepsilon = 0.3$ при навантаженні електричним потенціалом маємо наступний набір власних частот [8]

$$\Omega_{N=2} = (0.4622, 1.6737, 3.6914, 5.4406, 7.3271, 9.1119, 10.9763, \dots).$$

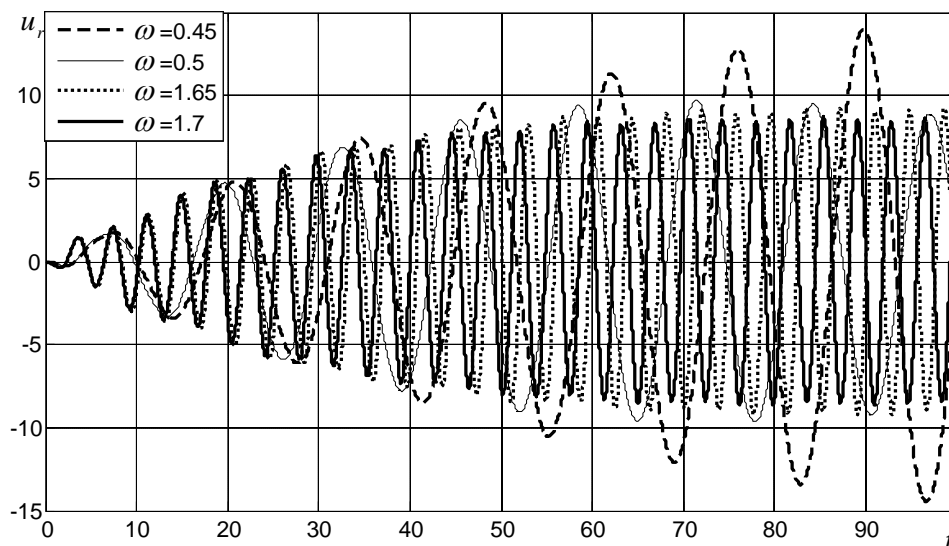


Рис. 1

Дослідимо коливання зовнішньої поверхні кулі в акустичному середовищі при нестационарних навантаженнях з частотами, близькими до резонансних (рис.1). При частоті $\bar{\omega} = 0.45$ бачимо наростання амплітуд коливань на всьому інтервалі. При збуреннях з частотами $\bar{\omega} = 1.65$ та $\bar{\omega} = 1.7$ наростання амплітуди спостерігається на інтервалі $t \leq 50$, надалі коливання відбуваються з близькими амплітудами, але різними частотами. При $\bar{\omega} = 0.6$ коливання перестають зростати після $t = 70$.

На рис. 2 наведено коливання куль з різними значеннями параметра кривизни $\varepsilon = h/R$ при збуренні з частотою $\bar{\omega} = 1$ в акустичному середовищі з параметром $\bar{z}_1 = 0.05$. Четверта крива (пунктирна) описує коливання кулі в повітрі ($\bar{z}_1 = 0$). При порі-

внянні з суцільною лінією (така ж куля в воді) бачимо зменшення максимальних відхилень приблизно на 30%.

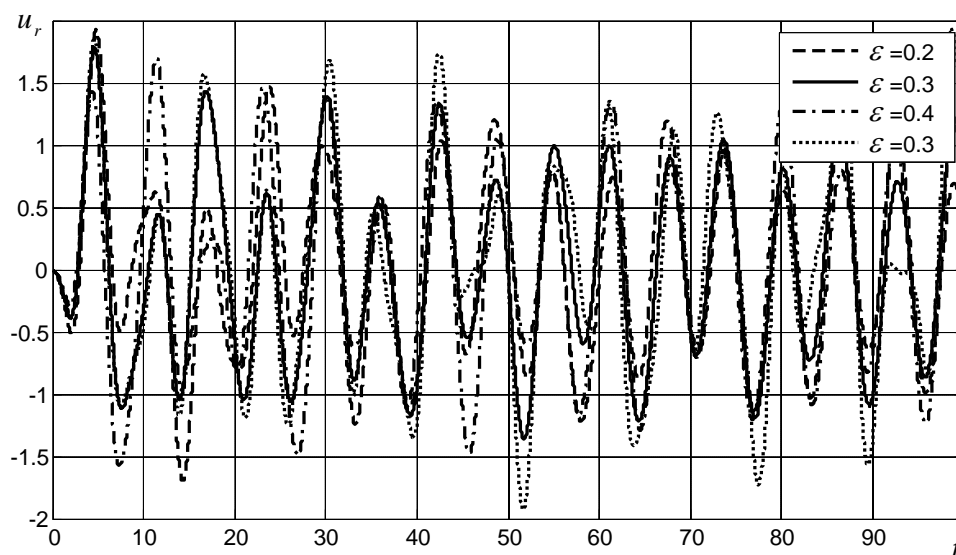


Рис. 2

Отримані результати свідчать про те, що закономірності випромінення коливань в електропружних тілах з врахуванням впливу акустичного середовища істотно відрізняються від аналогічних закономірностей, отриманих без врахування зовнішнього середовища. Спостерігається значне зменшення амплітуди коливань і помітна зміна отриманих кривих переміщень. Причиною цього є взаємодія полів різної фізичної природи, що виявляється і в математичному описі електропружних задач, і в наведених результатах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
2. Шульга Н. А., Григорьева Л. О., Кириченко А. А. Нестационарные упругоэлектрические колебания полого шара с импедансными граничными условиями // Прикладная механика. – 2014. – 50, №3, с. 54–60.
3. Шульга М. О., Григор'єва Л. О., Григор'єв С. А. Пружноелектричні коливання п'єзокерамічної кулі при електричному збуренні // Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла. – Матеріали VI Міжнародної наукової конференції. – Донецьк–Мелекіно, 8–11 червня 2010 р.
4. Chiroiu V., Munteanu L. On the free vibrations of a piezoceramic hollow sphere // Mechanics Research Communications. – 34, № 2. – March 2007. – P. 123–129.
5. Ding H. J., Wang H. M., Chen W. Q. Analytical solution for the electroelastic dynamics of a nonhomogeneous spherically isotropic piezoelectric hollow sphere // Arch. of Appl. Mech. – 2003. – Vol. 73, Iss. 6-7. – P. 49–62.

6. *Mason W. P.* Piezoelectricity, its history and applications // *J. Acoust. Soc. Am.* –1981. – **70**. N 6. – P. 1561–1566.
7. *Shulga M. O., Grigoryeva L. O.* Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis.* – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – P.179–204.
8. *Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O.* Comparative Analysis of the Electroelastic Thickness Vibrations of Layers with Curved Boundaries // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 2. – P. 177–185.