

# ГЕНЕРАЦІЯ ЗВУКУ ДВОВИМІРНИМ КВАДРАТНИМ ЦИЛІНДРОМ В ПОТОЦІ

В. Г. БАСОВСЬКИЙ, І. М. ГОРБАНЬ

*Інститут гідромеханіки НАН України*  
вул. Желябова, 8/4, 03680, Київ-180, МСП, Україна  
e-mail: basovsky@ukr.net

Розглянуто гібридний метод оцінювання акустичного поля, яке породжене в'язким однорідним прямолінійним потоком зі сталою дозвуковою швидкістю навколо двовимірного нескінченного циліндра. Гідродинамічна частина задачі розв'язується вихровим методом для моделі двовимірного в'язкого нестисливого середовища. Для знаходження акустичного поля, розв'язок гідродинамічної задачі поєднується з рівнянням Фокс Вільямса-Хоукінгса в частотній області.

## ВСТУП

Найбільш популярним методом оцінювання гідродинамічного звуку є гібридний метод. Основою цього методу є акустична аналогія Лайтхілла, що використовує дані для близького гідродинамічного поля, які можна дістати як експериментально, так і числовим моделюванням. У разі присутності в потоці твердих границь, розширенням акустичної аналогії є рівняння Фокс Вільямса-Хоукінгса (ФВ-Х).

Складність розв'язання рівняння ФВ-Х для двовимірних задач полягає в тому, що необхідно інтегрувати за часом на напівнескінченному інтервалі. Це зумовлено особливістю функції Гріна, яка для двовимірного хвильового рівняння є функцією Хевісайда, а не дельта-функцією Дірака, як для тривимірного рівняння. Отже, на відміну від тривимірних задач, двовимірні вимагають нескінченно довгого часу інтегрування, щоб врахувати нескінченну протяжність джерел звуку поперек потоку, що неможливо. Однак за певних умов, рівняння ФВ-Х можна записати в частотній області, як конвективне хвильове рівняння [1, 2], що дає змогу ефективно розв'язати його для двовимірних задач. Саме такий метод вибраний для дослідження звукового поля у цій статті.

Для обчислення одночленів, що описують джерела звуку в рівнянні ФВ-Х, можна використовувати різноманітні методи моделювання близького гідродинамічного поля. Мета цієї статті – поєднання вихрового методу [3] з розв'язанням рівняння ФВ-Х в частотній області для оцінювання далекого звукового поля, спричиненого обтіканням нескінченного квадратного циліндра в'язким однорідним прямолінійним потоком зі сталою дозвуковою швидкістю.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЧИСЛОВІ АЛГОРИТМИ

Розглянемо задачу про генерацію звуку двовимірним квадратним циліндром з довжиною сторони  $a$  у в'язкому однорідному потоці з незмінним вектором швидкості  $U_0$ . Швидкість потоку вважаємо набагато меншою за швидкість звуку в незбуреному

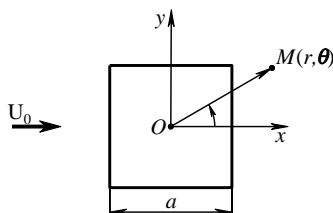


Рис. 1. Геометрія задачі та системи координат

середовищі. Геометрія задачі й системи координат зображені на рис. 1. Початок декартової системи координат  $O$  збігається з геометричним центром поперечного перерізу циліндра. При цьому вісь  $x$  паралельна вектору швидкості потоку, а вісь  $y$  – перпендикулярна. Початок полярної системи координат  $(r, \theta)$  збігається з початком декартової системи координат і кут  $\theta$  відраховується від додатного напрямку осі  $x$  проти стрілки годинника. Вибрані системи координат жорстко пов’язані з циліндром, тобто в цих системах координат циліндр є нерухомий, а середовище, навпаки, рухається прямолінійно зі сталою швидкістю.

### 1.1 Вихровий метод розв’язання двовимірних рівнянь Нав’є-Стокса

Першим кроком гібридних методів оцінювання звуку, породженого сходженням вихорів з поверхні тіла, є числове моделювання близького гідродинамічного поля навколо тіла. Якщо швидкість течії, що обтікає тіло, є малою порівнянно зі швидкістю звука в середовищі, то впливом стисливості останнього можна знехтувати, і вивчати особливості гідродинамічного поля навколо тіла в рамках моделі в’язкого нестисливого середовища. Одним із ефективних методів числового моделювання двовимірних течій нестисливого в’язкого середовища є вихровий метод. В цій роботі застосовано узагальнений вихровий метод, який поєднує використання сітки, що накладається на поле течії, з рухом лагранжевих вихрових частинок [3].

Задача про зовнішнє обтікання нерухомого двовимірного квадратного циліндра потоком в’язкого нестисливого середовища сталої густини описується рівняннями неперервності й Нав’є-Стокса. Початковий розподіл швидкостей у середовищі вважається відомим; як граничні умови використовуються умови затухання збурень на нескінченності:  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{U}_0$ ,  $p(\mathbf{r}, t) \rightarrow p_0$ , коли  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ , і умова прилипання на зовнішній границі циліндра  $L$ :  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$  для  $\mathbf{r} \in L$ . Тут прийняті позначення:  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  і  $p(\mathbf{r}, t)$  – відповідно швидкість і тиск збуреного середовища в точці з радіусом-вектором  $\mathbf{r}$  в момент часу  $t$ ;  $p_0$  – тиск середовища в стані спокою.

Головною особливістю вихрових методів є перехід від рівнянь неперервності та Нав’є-Стокса до рівняння переносу завихреності:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Omega = \nu \Delta \Omega, \quad (1)$$

де  $\nabla$  і  $\Delta$  – диференціальні оператори Гамільтона й Лапласа;  $\nu$  – кінематична в’язкість середовища;  $\Omega$  – нормальна до площини течії компонента вектора завихреності  $\nabla \times \mathbf{u}$ .

Тут варто зауважити, що для двовимірних течій тільки ця компонента вектора завихреності тотожно не дорівнює нулю. Перевагою рівняння (1) є незалежність його від гідродинамічного тиску і точне виконання умови неперервності середовища та граничних умов на нескінченності. Первинною розрахунковою величиною тепер є поле завихреності течії, а поле швидкості можна відновити за допомогою закону Біо-Савара. Поле тиску течії обчислюється за полями швидкості й завихреності з допомогою рівняння Нав'є-Стокса у формі Ламба.

Для кожного часового кроку рівняння (1) розщеплюється на два, перше з яких описує поширення завихреності шляхом в'язкої дифузії, а друге – шляхом конвекції:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \Delta \Omega, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \Omega. \quad (2)$$

Перевагою такого підходу є те, що кожне з рівнянь (2) може бути зінтегроване незалежно від іншого найбільш відповідним для нього способом.

Для чисельного інтегрування рівнянь (2) за часом використовується явна схема першого порядку з коректуванням усіх змінних поля течії після виконання кожного оператора. Просторові похідні другого порядку апроксимуються на ортогональній рівномірній сітці центральними різницями. Для моделювання конвективного переносу завихреності використовується метод скінченних об'ємів.

Зовнішня границя циліндра моделюється вихровими шарам. Його інтенсивність обчислюється методом граничних інтегральних рівнянь, які впливають з умови неперотікання й теорема про збереження циркуляції по замкненому контуру. Чисельно ці рівняння розв'язуються дискретно-вихровим методом. Для оцінювання завихреності, що сходиться з гладких ділянок границі, використовується умова прилипання та правило щодо розриву дотичної швидкості під час переходу через вихровий шар. Генерація завихреності в гострих кутах описується умовою Кутта-Жуковського.

На початковій стадії розрахунку течія симетрична відносно площини  $y=0$ . Щоб досягти швидкого переходу до несиметричної течії з доріжкою Кармана, у потік вводяться початкові збурення у вигляді пари несиметрично розташованих вихорів, які швидко дифундують і не впливають на результати числового моделювання.

## 1.2 Розв'язання рівняння ФВ-Х в частотній області

Дістані характеристики близького гідродинамічного поля тіла в потоці можна використати як вхідні дані звукових джерел хвильового рівняння ФВ-Х. Відомо, що класичне рівняння ФВ-Х записується в часовій області в системі координат, яка жорстко пов'язана з тілом. При цьому вважається, що тіло рухається в нерухомому середовищі. Одночлени в правій частині рівняння ФВ-Х, що описують розташовані на поверхні тіла джерела звуку монопольного й дипольного типу, мають в собі як множник дельта-функцію Дірака з аргументом, що залежить як від часу, так і від просторових координат. Саме це є перешкодою для застосування перетворення Фур'є безпосередньо до рівняння ФВ-Х. Але для важливого практичного випадку, коли тіло рухається пряминолінійно зі сталою швидкістю, цю перешкоду можна подолати [1], а саме: за допомогою перетворення Галілея перейти від рухомої системи координат до нерухомої, теж жорстко пов'язаній з тілом. В такій системі координат нерухомим буде тіло, а середовище, навпаки – рухолим.

Після перетворення Галілея хвильове рівняння ФВ-Х набирає вигляду конвективного хвильового рівняння [1]:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + U_i U_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + 2U_j \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right\} [\rho' H(f)] = \frac{\partial}{\partial t} [Q \delta(f)] - \frac{\partial}{\partial y_i} [F_i \delta(f)] + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [T_{ij} H(f)], \quad (3)$$

де монопольний, дипольний і квадрупольний члени в правій частині відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{y}, t) &= (\rho u_i - \rho_0 U_i) n_i, \\ F_i(\mathbf{y}, t) &= (p \delta_{ij} + \rho (u_i - 2U_i) u_j + \rho_0 U_i U_j) n_j, \\ T_{ij}(\mathbf{y}, t) &= \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - c_0^2 \rho' \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $c_0$  – швидкість звуку;  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $p = p_0 + p'$ ,  $u_i = U_i + u'_i$  – відповідно повні значення густини, тиску й швидкості. Значення параметрів середовища в стані спокою позначені нижнім індексом нуль;  $U_i$  – компоненти швидкості незбуреного потоку; знак штрих позначає збурення відповідної величини під час обтікання тіла потоком. Декартові координати й час позначені як  $y_i$  і  $t$ ;  $\delta(f)$  – дельта-функція Дірака;  $H(f)$  – функція Хевісайда;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Функція  $f(\mathbf{y})$  залежить тільки від просторових координат  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  і означена так, що  $f = 0$  на зовнішній поверхні тіла,  $f < 0$  – усередині,  $f > 0$  – ззовні;  $n_j = \partial f / \partial y_j$  – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні нерухомого тіла. У формулах (4) в'язкою частиною тензора напружень нехтуємо і використовуємо тільки його нев'язку частину  $p \delta_{ij}$ .

Для скорочення запису у формулах (3) і (4) замість літерної індексації координат і проєкцій векторів використана числова. Крім того, дотримуючись правила Ейнштейна, пропущений знак суми перед підсумовуваними одночленами, якщо індекс підсумовування в одночлені повторюється двічі. Оскільки розглядаємо двовимірну задачу, індекси в цих формулах можуть набувати значень 1 і 2,

У далекому полі середовище вважаємо ізотропним акустично ідеальним, тобто збурення густини й тиску достатньо малі ( $\rho' \ll \rho_0$  і  $p' \ll p_0$ ) та зв'язані співвідношенням  $p' = c_0^2 \rho'$ . Нехай середовище рухається зі швидкістю меншою за швидкість звуку. У цьому разі після перетворення Фур'є рівняння (3) й деяких спрощувань частотну залежність збурення тиску (акустичний тиск) в точці спостереження  $\mathbf{y}_o = (y_{o1}, y_{o2})$  далекого поля можна обчислити за такою формулою [1]:

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{y}_o, \omega) &= - \oint_{f=0} i\omega \hat{Q}(\mathbf{y}, \omega) G(\mathbf{y}_o, \mathbf{y}, \omega) dl - \oint_{f=0} \hat{F}_i(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial G(\mathbf{y}_o, \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} dl - \\ &\quad - \int_{f>0} \hat{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}_o, \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} dy, \end{aligned} \quad (5)$$

з функцією Гріна в частотній області конвективного хвильового рівняння для вільного простору:

$$G(\mathbf{y}_o, \mathbf{y}, \omega) = \frac{i}{4\beta} \exp\left(\frac{iMkr_1}{\beta^2}\right) \cdot H_0^2\left(\frac{k}{\beta^2} \sqrt{r_1^2 + \beta^2 r_2^2}\right), \quad (6)$$

де

$$r_1 = (y_{o_1} - y_1) \cos \theta + (y_{o_2} - y_2) \sin \theta, \quad r_2 = -(y_{o_1} - y_1) \sin \theta + (y_{o_2} - y_2) \cos \theta.$$

Тут прийняті такі позначення:  $\theta = \arctg(U_2/U_1)$ ;  $H_0^2$  – функція Ханкеля другого роду нульового порядку;  $\omega$  – кутова частота;  $k = \omega/c_0$  – хвильове число;  $M = |\mathbf{U}|/c_0$  – число Маха;  $\beta = \sqrt{1 - M^2}$  – множник Прандтля-Глауєрта;  $\hat{Q}(\mathbf{y}, \omega)$ ,  $\hat{F}_i(\mathbf{y}, \omega)$  і  $\hat{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega)$  – перетворення Фур'є відповідно функцій  $Q(\mathbf{y}, t)$ ,  $F_i(\mathbf{y}, t)$  і  $T_{ij}(\mathbf{y}, t)$  для фіксованої точки течії  $\mathbf{y}$ ;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Щоб перейти в часову область після обчислення звукового поля в частотній за формулою (5), необхідно застосувати обернене перетворення Фур'є. Формули (3)–(6) записані для загального випадку напрямку руху середовища. Для нашої задачі, коли середовище рухається в додатному напрямі осі абсцис зі сталою швидкістю  $U_0$ , будемо вважати, що  $U_1 = U_0$  і  $U_2 = 0$ .

В роботі [2] показано, що для двовимірної задачі про обтікання тіла потоком звукова хвиля в далекому полі циліндрична. При цьому амплітуда пульсацій тиску в далекому полі для монопольного, дипольного і квадрупольного джерел звуку відповідно пропорційна таким величинам:  $M^{3/2}$ ,  $M^{5/2}$  і  $M^{7/2}$ . Отже, для малих значень числа Маха амплітуда звуку квадрупольних джерел набагато менша за амплітуду монопольних і дипольних джерел. Тому у формулі (5) можна знехтувати останнім подвійним інтегралом у разі малих значень числа Маха.

Зазначимо, що коли в рівнянні ФВ-Х використовуються дані близького гідродинамічного поля тільки на непроникливій поверхні тіла, то розрахунок звукового поля можна спростити. Дійсно, в цьому разі  $\mathbf{u} = 0$  (умова прилипання) і у формулах (4) для  $Q(\mathbf{y}, t)$  і  $F_i(\mathbf{y}, t)$  тільки одноклен  $\rho \delta_{ij} n_j$  залежить від часу, коли середовище рухається прямолінійно зі сталою швидкістю. Отже, якщо знехтувати квадрупольним джерелом звуку для малих значень числа Маха, то тільки часова залежність пульсацій тиску на поверхні тіла визначає його звукове поле в потоці.

## 2 ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Вибір числа Рейнольдса для двовимірної моделі потоку обмежений зверху критичним значенням, для якого течія від двовимірної переходить до тривимірної. Відомо, що для нескінченного квадратного циліндра такий перехід відбувається, коли  $150 < Re < 200$ , де число Рейнольдса  $Re = U_0 a / \nu$ . Враховуючи цей факт, у цьому дослідженні  $Re = 150$ . Параметри числового моделювання гідродинамічної задачі такі. Кількість вихрових відрізків на одній стороні квадрата поперечного перерізу циліндра 40. Безрозмірний крок сітки з квадратними елементами, що накладається на поле течії поблизу поверхні циліндра,  $\Delta x/a = \Delta y/a = 0.025$ . Зі збільшенням відстані від циліндра величина кроків  $\Delta x$  і  $\Delta y$  зростає. Безрозмірний часовий крок  $\Delta t U_0/a = 0.01$ . Дискретні часові значення пульсацій тиску в точках сітки на поверхні циліндра були вхідними даними акустичної задачі. Квадрупольним джерелом звуку нехтуємо. Як уже зазначалось, у цьому разі для непроникливої поверхні акустичне поле буде формувати тільки дипольне джерело звуку. Звукове поле оцінювали для числа Маха  $M = 0.2$ . При цьому застосовували швидке перетворення Фур'є до дипольного члена в рівнянні ФВ-Х і використовували квадратурний метод трепещій для обчислення відповідного криволінійного інтеграла в формулі (5).

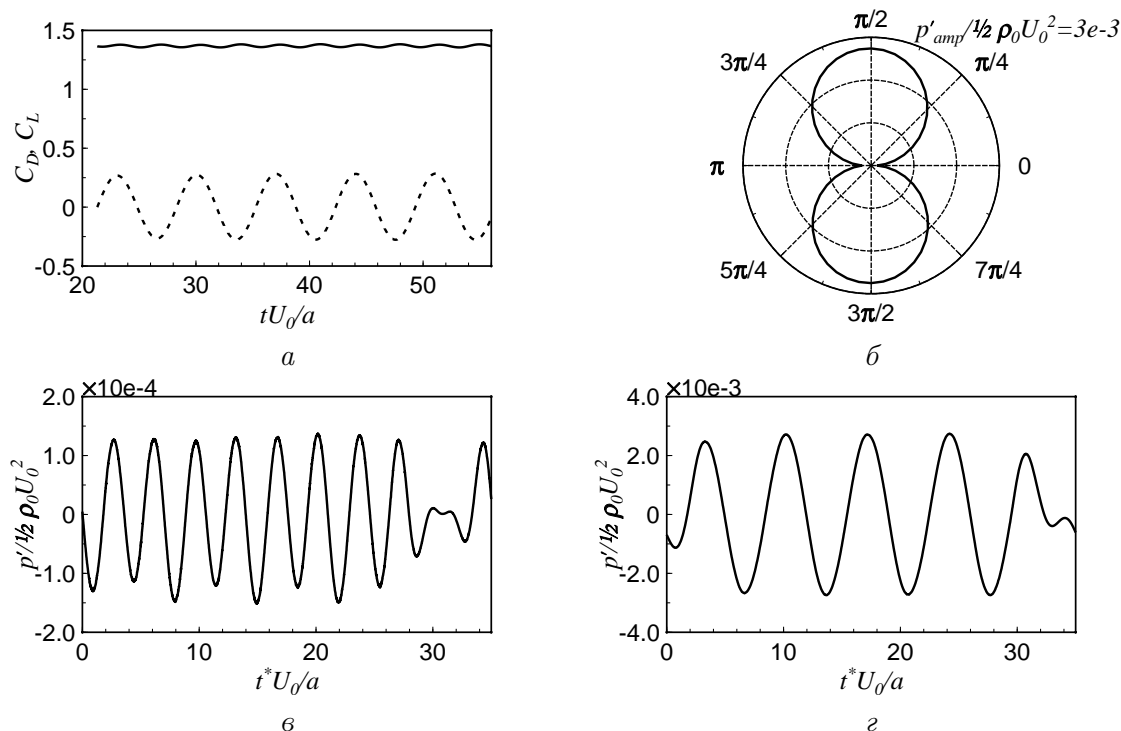


Рис. 2. Характеристики близького гідродинамічного і далекого акустичного поля:   
 а – часові залежності коефіцієнтів опору (суцільна крива) й піднімальної сили (штрихова крива); б – характеристика спрямованості акустичного поля для  $r/a=80$ ; в, г – акустичні сигнали для  $r/a=80$  відповідно для кутів  $\theta=0^\circ$  і  $\theta=90^\circ$

Загалом картина течії навколо квадратного нескінченного циліндра суттєво не відрізняється якісно від картини течії навколо круглого, за винятком того, що точки відриву примежового шару для квадратного циліндра є фіксованими, а саме, ребра в його кормовій частині. Для числа  $Re = 150$  течія навколо квадратного циліндра є нестійкою, при цьому з верхньої і нижньої граней циліндра по черзі зриваються вихрові структури, які утворюють вихрову доріжку Кармана. Рух стає нестационарним, але періодичним. У цьому дослідженні гідродинамічне й акустичне поле аналізували для перших п'ятих послідовних статистично стаціонарних періодів зривання вихорів<sup>1</sup>.

На рис. 2, а зображено часові залежності коефіцієнтів опору  $C_D$  й піднімальної сили  $C_L$ . Коефіцієнти  $C_D$  і  $C_L$  нормовані відносно  $a$  і зведені до одиничної довжини вздовж осі циліндра. Як бачимо, амплітуда пульсацій коефіцієнта  $C_L$  значно більша ніж амплітуда пульсацій коефіцієнта  $C_D$ , при цьому частота пульсацій для  $C_L$  приблизно в два рази менша ніж для  $C_D$ . Число Стухалія  $St = fa/U_0$  ( $f$  – частота зривання вихорів), обчислене за даними коефіцієнта піднімальної сили, дорівнює 0.143. Це значення числа Стухалія менше, з відносною похибкою 5%, ніж дістане в [4] значення 0.151. Середнє значення коефіцієнта опору  $\overline{C_D} = 1.37$  теж менше за значення 1.4 дістане в [4]. Тут відносна похибка дорівнює 2%. У статті [4] прямим числовим моделюванням (DNS) двовимірні стисливі рівняння Нав'є-Стокса розв'язуються скінченними різницями зі схемою восьмого порядку точності (четвертий порядок точності на границі) для просторових координат і четвертого порядку точності за часом. Набір обчислюваних

<sup>1</sup>період зривання вихорів – відрізок часу між послідовними зриваннями вихорів з однієї із граней

експериментів DNS є сьогодні базою даних для оцінювання похибки результатів інших методів моделювання в гідромеханіці. У разі використання детальної просторової дискретизації, точність DNS може перевищувати можливості фізичного експерименту та вимірювальних приладів. Тому тут і далі наші результати порівнюємо з відповідними даними зі статті [4].

Таким чином, вибраний варіант вихрового методу дає змогу з високою точністю визначати величини  $St$  і  $\overline{C}_D$ . Але, при цьому амплітуди пульсацій коефіцієнтів  $C_D$  і  $C_L$  визначаються, на жаль, з відносною похибкою 30% порівняно з відповідними величинами в [4]. Оскільки коефіцієнти  $C_D$  і  $C_L$  є інтегральною мірою пульсацій тиску на поверхні циліндра, то ця похибка, безсумнівно, через формулу (5) переноситься і в далеке акустичне поле. На рис. 2, б зображено характеристику спрямованості акустичного поля, тобто безрозмірну амплітуду пульсацій звукового тиску на відстані  $r/a=80$ . Характеристика спрямованості тут обчислена для точок на геометрично, а не акустично, як в [4], однаковій відстані від осі циліндра. Як бачимо, пелюстки характеристики злегка переміщуються назустріч потоку і, в цілому, переважає диполь піднімальної сили. Акустичні сигнали вниз за потоком і безпосередньо над циліндром, відносно часу спостерігача  $t^*$ , маємо на рис. 2, в, г. Для  $\theta=90^\circ$  явно домінує диполь піднімальної сили і частота сигналу збігається з частотою зривання вихорів. Водночас для  $\theta=0^\circ$  частота сигналу збігається з частотою пульсацій коефіцієнта сили опору. При цьому амплітуда сигналу для  $\theta=0^\circ$  набагато менша ніж для  $\theta=90^\circ$ .

## ВИСНОВКИ

Розвинуто двовимірний гібридний метод оцінювання далекого акустичного поля на основі вихрового методу й рівняння ФВ-Х в частотній області. Метод дає змогу точно врахувати нескінченну протяжність джерел звуку поперек потоку. Оцінено параметри акустичного поля, породженого обтіканням нескінченного квадратного циліндра в'язким дозвуковим однорідним потоком зі сталим вектором швидкості. Показано, що характеристику направленості, в основному, визначає диполь піднімальної сили, а часова залежність звукових сигналів в далекому полі визначається місцем розташування точки спостерігання.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Lockard D. P. An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkins equation // J. Sound and Vib.– 2000.– **229**, N 4.– P. 897–911.
2. Guo Y. P. Application of the Ffowcs Williams/Hawkins equation to two-dimensional problems // J. Fluid Mech.– 2000.– **403**.– P. 201–221.
3. Горбань В. О., Горбань І. М. Вихрова структура потоку при обтіканні квадратної призми: числова модель та алгоритми управління // Прикладна гідромеханіка.– 2005.– **79**, N 2.– С. 8–26.
4. Inoue O., Iwakami W., and N. Hatakeyama Aeolian tones radiated from flow past two square cylinders in a side-by-side arrangement // Phys. Fluids.– 2006.– **18**.– P. 046104-1–046104-20.