

# ОСОБЕННОСТИ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТРЕХ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ: ВЗАИМНЫЙ ЗАХВАТ

Т. П. КОНОВАЛЮК

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
ул. Желябова, 8/4, 03680, Киев-180, ГСП, Украина  
тел. 456-72-19; e-mail: tpk\_8\_4@ukr.net*

В рамках модели точечных вихрей и акустической аналогии Лайтхилла выполнены расчеты и проведен анализ звуковых полей, порождаемых тремя точечными вихрями с интенсивностями  $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3$  в режиме взаимного захвата в безграничной идеальной жидкости при малых числах Маха. Обнаружен эффект вращения диаграммы направленности. Установлено соотношение между поворотом диаграммы направленности и поворотом вихревой системы. Показано, что звуковое поле на лепестке диаграммы направленности является периодическим, звуковое поле в фиксированной точке наблюдения может быть как периодическим, так и непериодическим.

## ВСТУПЛЕНИЕ

Начало развития общей теории гидродинамического шума следует отнести к 1952 году - году опубликования первой из двух пионерских работ Лайтхилла [1], в которых была предложена акустическая аналогия для расчета звука, генерируемого турбулентным потоком, помещенным в неограниченную однородную среду. В дальнейшем основные положения теории Лайтхилла были развиты рядом ученых, в частности, Керлом и Пауэллом, и распространены на ситуации при наличии твердых границ Фокс-Вильямсом и Холлом. Обзор существующих направлений, связанных с изучением данной проблемы, представлен в [2–4].

Существует два основных подхода при моделировании шума потока: метод акустической аналогии и метод сращиваемых асимптотических разложений. Подход, основанный на сращиваемых асимптотических разложениях, стал применяться к решению задач такого класса благодаря попыткам ряда авторов (Кроу, Меринг, Обермейер) формализовать теорию гидродинамического шума. Изложение данного подхода можно найти, например, в работе [3]. Данный подход является мощным инструментом при исследовании задач данного класса, однако ограничен требованием акустической компактности течения в отличие от метода акустической аналогии. Метод акустической аналогии Лайтхилла является базисным при решении задач об излучении гидродинамического шума.

Анализ литературы показывает, что описание излучения звука вихревыми потоками – сложная задача. Повысить уровень понимания таких явлений существенно помогает исследование процесса звукообразования от модельных течений. В качестве модельного объекта исследования выберем течение, образованное тремя точечными вихрями в безграничной идеальной жидкости. Отметим, что техника построения решений для нахождения звуковых полей от таких модельных течений хорошо отработана. Ряд

известных результатов можно найти, например, в [5]. Нас будет интересовать связь между гидродинамическими и акустическими характеристиками. При решении задачи об излучении звука точечными вихрями будет использована акустическая аналогия Лайтхилла.

## 1 МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ

Взаимодействие  $N$  точечных вихрей с интенсивностями  $\kappa_\alpha$  и координатами  $(x_\alpha, y_\alpha)$  в безграничной идеальной среде описывается гамильтоновой системой уравнений [6]. Подробный анализ решений системы и обширная библиография по исследованию точечных вихрей содержатся, например, в работах [7,8]. Как известно, задача о движении трех точечных вихрей в отсутствие границ интегрируема [7]. Рассмотрим вихревую систему, образованную вихрями с интенсивностями  $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3$ . Такой выбор обусловлен тем, что ее поведение дает полное качественное представление о всех возможных типах взаимодействия при детерминированном движении точечных вихрей. В работах [9, 10] детально рассмотрены все типы взаимодействия вихревой пары с одиночным вихрем в идеальной несжимаемой жидкости при интенсивностях  $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3$ .

Рассматриваемая вихревая система демонстрирует три типа взаимодействия: прямое, обменное и взаимный захват [9]. Генерация звука данной системой точечных вихрей в случаях прямого и обменного взаимодействий детально исследована в работе [11]. В этой статье будет рассмотрено звуковое поле, генерируемое вихревыми точками в случае взаимного захвата. Вихри при взаимном захвате вращаются вокруг центра завихренности (помещенного в начало координат), при этом вихри 1 и 2 с интенсивностями  $\kappa_1 = \kappa_2$  движутся по пересекающимся петлеобразным траекториям, а вихрь 3 с  $-\kappa_3$  вращается вокруг них по слегка отличной от окружности траектории (рис. 1). Данный тип взаимодействия характеризуется двумя линейными параметрами  $l = 1$  (результат нормировки в поле течения) и  $b$ . Будем исследовать характеристики взаимодействия и акустического поля в зависимости от параметра  $b$ : для взаимного захвата  $-1.5 < b < -1$  (рис. 1). При  $b \rightarrow -1.5$  в начальный момент времени вихри одного знака 1 и 2 приближаются друг к другу; при  $b \rightarrow -1$  вихри 1 и 3 отстоят от вихря 2 на одинаковое расстояние ( $= 0.5$ ). Характер движения вихрей таков, что полярные координаты вихрей удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \rho_j(\tau + nT_v) &= \rho_j(\tau); \\ \theta_j(\tau + nT_v) &= \theta_j(\tau) + n\Theta_v; \\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Theta_v$  – угол, на который поворачивается вихревая система как единое целое за время  $T_v$  [9] (рис. 1).  $T_v$ ,  $\Theta_v$  – константы для каждого параметра  $b$ . Из соотношений (1) сле-

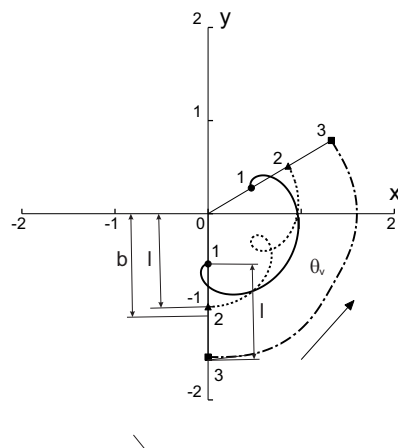


Рис. 1. Геометрия течения при взаимном захвате.

дует, что движение вихрей характеризуется двумя основными частотами:  $\omega_0 = 2\pi/T_v$  и  $\omega_v/2 = \Theta_v/T_v$ . Частоты имеют следующий физический смысл:  $\omega_v/2$  есть угловая скорость вращения вихревой системы как единого целого;  $\omega_0$  – основная частота собственно взаимодействия вихрей.

Предельные значения параметров  $T_v$ ,  $\Theta_v$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_v/2$  при  $b \rightarrow -1.5$  и  $b \rightarrow -1$  таковы, соответственно:

$$\lim_{b \rightarrow -1.5} T_v = \lim_{b \rightarrow -1.5} \Theta_v = 0; \quad \lim_{b \rightarrow -1.5} \omega_0 = \infty; \quad \lim_{b \rightarrow -1.5} \frac{\omega_v}{2} = \frac{1}{2\pi};$$

$$\lim_{b \rightarrow -1} T_v = \lim_{b \rightarrow -1} \Theta_v = \infty; \quad \lim_{b \rightarrow -1} \omega_0 = 0; \quad \lim_{b \rightarrow -1} \frac{\omega_v}{2} = \frac{1}{2\pi};$$

## 2 МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В случае гомоэнтропичного потока с малыми числами Маха акустическая аналогия приводит к уравнению вихревого звука Пауэлла, связывающему звуковое поле с полем завихренности течения несжимаемой жидкости [11]. Решение уравнения должно быть подчинено условию излучения Зоммерфельда. Поскольку процесс взаимодействия вихрей бесконечен (идеализация), то начальные условия не ставятся. Но для численного решения начальные условия необходимы. Полагаем их нулевыми (значение давления и его производной по времени), при этом будет иметь место переходной процесс при установлении временной зависимости давления. Задача решалась в безразмерном виде. Масштабы обезразмеривания принимались такими, как в работе [11].

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику вихрей, интегрировались численно методом экстраполяции с переменным шагом и порядком. Звуковое давление вычислялось по квадратурным формулам Гаусса, учитывающим интегрируемую особенность. Фурье-образы вычислялись методом быстрого преобразования Фурье.

Известно, что течения, формируемые точечными вихрями в безграничной идеальной слабосжимаемой среде, порождают источники звука, являющиеся аналогом классических поперечных квадрупольей [1].

## 3 АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Поскольку вихри при взаимодействии вращаются, то вращается и диаграмма направленности порождаемого таким течением звукового поля. Анализ численных результатов показал, что диаграмма направленности при повороте вихрей на угол  $\Theta_v$  поворачивается на  $2\pi$  больший угол:  $\Delta\theta_{DN} = \Theta_v + 2\pi$ . Наличие слагаемого  $2\pi$  обусловлено вращением вихрей по замкнутым траекториям в системе координат, движущейся с угловой скоростью  $\omega_v/2$ .

Поскольку координаты вихрей и их производные входят в функцию источника в волновом уравнении нелинейно и источник является квадруполем, то спектр звукового давления в неподвижной точке наблюдения представлен набором частот:  $2n\omega_0 \pm \omega_v$  и  $2n\omega_0$ . В зависимости от соотношения основных частот  $2\omega_0$  и  $\omega_v$ , комбинации которых формируют звуковое поле в неподвижной точке наблюдения, временная зависимость давления может быть как периодической, так и непериодической функцией времени. Периодическим звуковое поле будет:

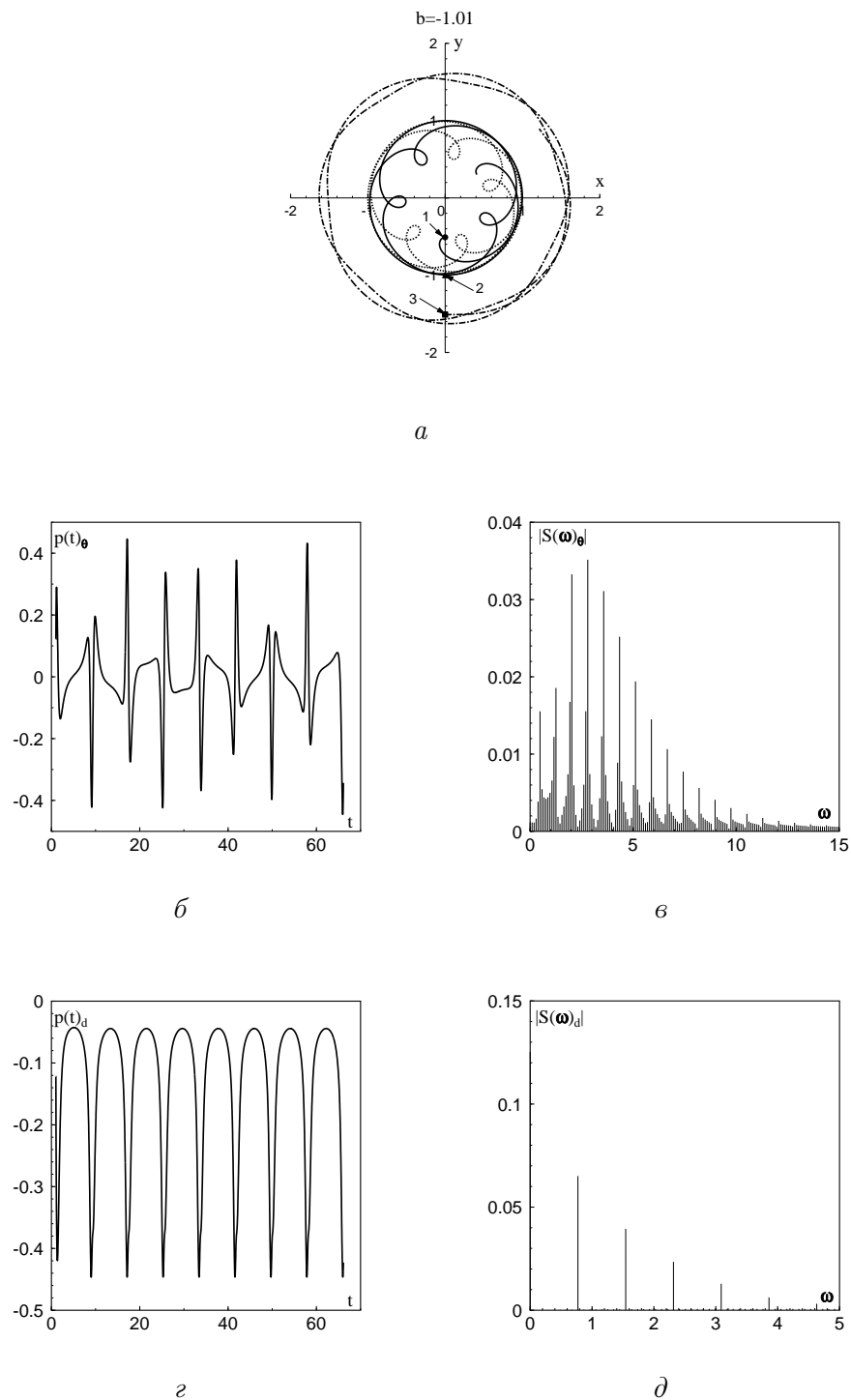


Рис. 2. Поведення вихрей і звукове поле при  $b = -1.01$  ( $2\omega_0 = 0.772$ ;  $\omega_v = 0.454$ ):  
 $a$  – траєкторії вихрей;  $b$  – часова залежність тиску в нерухомій точці спостереження;  $c$  – амплітудний спектр тиску в нерухомій точці спостереження;  $d$  – часова залежність тиску на осі діаграми напрямленості;  $e$  – амплітудний спектр тиску на осі діаграми напрямленості

- при выполнении условия кратности частот  $2\omega_0 = m\omega_v$ ,  $m \geq 1$  – с периодом  $T = 2\pi/\omega_v$ ;
- при  $\omega_0 \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow -1$ ) – с периодом  $T = 2\pi/\omega_v$ ;
- при  $\omega_0 \rightarrow \infty$  ( $b \rightarrow -1.5$ ) – с периодом  $T = 2\pi/\omega_v$

Что касается давления на оси лепестка диаграммы направленности (в соответствии с работой [11]), то оно является всегда периодическим с периодом  $T = \pi/\omega_0$ . При  $b \rightarrow -1.5$  – это гармоническая временная зависимость; при  $b \rightarrow -1$  – это const. На рис. 2, а представлены типичные траектории вихрей при взаимном захвате; на рис. 2, б, в – временная зависимость давления в неподвижной точке наблюдения в дальнем поле и ее амплитудный спектр, соответственно; на рис. 2, г, д – временная зависимость давления в направлении оси лепестка диаграммы направленности в дальнем поле и ее амплитудный спектр, соответственно. Заметим, что в спектре звукового давления на оси лепестка диаграммы направленности не приведена постоянная составляющая.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели точечных вихрей и акустической аналогии Лайтхилла выполнены численные расчеты и анализ звуковых полей, генерируемых точечными вихрями при взаимном захвате:

- При взаимном захвате имеет место вращение диаграммы направленности звукового поля, что обусловлено вращением вихрей при взаимодействии.
- Поворот диаграммы направленности в процессе взаимодействия вихрей за время  $T_v$  больше поворота вихревой системы на  $2\pi$ .
- Звуковое давление в неподвижной точке наблюдения в дальней зоне в зависимости от соотношения частот  $2\omega_0$  и  $\omega_v$  может быть как периодической временной зависимостью с периодом  $T = 2\pi/\omega_v$ , так и непериодической; давление на оси лепестка диаграммы направленности в дальней зоне периодическое с периодом  $T = \pi/\omega_0$  или при  $b \rightarrow -1$  – const.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. Roy. Soc. Lond.– 1952.– **A211**.– P. 564–587.
2. *Ffowcs Williams J. E.* Hydrodynamic Noise // Ann. Rev. Fluid Mech.– 1969.– **1**.– P. 197–222.
3. *Crighton D. G.* Basic principles of aerodynamic noise generation // Progr. Aerospace Sci.– 1975.– **16**, № 1.– P. 31–96.
4. *Вовк И. В., Гринченко В. Т.* Звук, рожденный потоком.– К.: Наук. думка, 2010.– 224 с.

5. *Howe M. S.* Theory of vortex sound.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.– 216 p.
6. *Бэтчелор Дж.* Введение в механику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.
7. *Aref H.* Intergable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // Ann. Rev. Fluid Mech.– 1983.– **15**.– P. 345–389.
8. *Мелешко В. В., Константинов М. Ю.* Динамика вихревых структур.– К.: Наук. думка, 1993.– 279 с.
9. *Gröbli W.* Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Zurich.– 1877.– **22**.– С. 37–81, 129–165.
10. *Коновалюк Т. П.* Классификация взаимодействия вихревой пары с точечным вихрем в идеальной жидкости // Гидромеханика.– 1990.– **62**.– С. 64–71.
11. *Коновалюк Т. П.* Особенности структуры звукового поля при взаимодействии точечных вихрей // Акуст. вісник.– 2012.– **15**, N 1.– С. 38–58.