

ОБОБЩЕНИЕ ПРУЖИННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПОЛОСОВЫХ МИКРОТРЕЩИН РАЗЛИЧНОГО РАЗМЕРА И ДЛЯ ПЛОСКИХ ТРЕХМЕРНЫХ МИКРОТРЕЩИН

М. В. ГОЛУБ, О. В. ДОРОШЕНКО

Институт математики, механики и информатики, КубГУ, Краснодар

e-mail: m_golub@inbox.ru; oldorosh@gmail.com

Динамическое поведение поврежденной зоны описывают путем введения распределения микротрещин или замены поврежденной зоны другими эффективными средами, а также путем введения специальных граничных условий. В настоящей работе производится обобщение подходов Баика-Томпсона и Бострёма-Викхема, использующих пружинные граничные условия для описания поврежденных интерфейсов в случае полосовых трещин различных размеров и для трехмерного случая. Показывается, что в частном случае одинаковых дефектов полученные соотношения совпадают с известными результатами, но являются более общими и точными. Кроме того, выводятся пружинные граничные условия для трехмерных интерфейсных трещин в изотропном случае.

ВВЕДЕНИЕ

Появление новых композитных материалов делает актуальными задачи обнаружения и идентификации внутренних неоднородностей, в частности, с помощью ультразвукового неразрушающего контроля. Динамическое поведение поврежденной зоны описывают путем введения распределения микротрещин (полостей) [1] или пятен контакта [2]. Получили развитие и другие подходы к моделированию поврежденных материалов: замена поврежденной зоны тонким вязкоупругим слоем, в том числе в комбинации с рассматриваемым в настоящей работе введением пружинных граничных условий (ПГУ) [2]. Использование ПГУ видится весьма эффективным, что подтверждается экспериментальными работами, например, [3]. ПГУ являются более общими граничными условиями нежели условия свободных от напряжений берегов трещины и позволяют описывать более широкий класс отслоений. Кроме того, при решении обратных задач об идентификации дефектов ПГУ могут дать знание о степени поврежденности. В трехмерном случае ПГУ в точке $\mathbf{x}$ поверхности S с нормалью $\mathbf{n}$ записываются как

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \kappa (\mathbf{u}_{\mathbf{n}-}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{\mathbf{n}+}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S,$$

где κ – матрица жёсткостей 3×3 , $\mathbf{n}_{\pm}$ – внешняя и внутренняя нормали к поверхности в точке $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}$ – нормальные и касательные компоненты тензора напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ в $\mathbf{x}$, а $\mathbf{u}$ – вектор перемещений.

1 ПРУЖИННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ: ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

В [4, 5] были получены соотношения для жёсткостей в ПГУ для антиплоского и плоского случаев в предположении, что все трещины имеют одинаковую ширину

2*l*. Для интерфейса с повреждённостью *C* между материалами *A* и *B*, где дефекты неограничены вдоль оси *x*₂ и нормаль **n** = {0, 0, 1} совпадает с осью *x*₃, в антиплоском случае имеется одна ненулевая компонента

$$\kappa_{22} = \frac{4}{\pi Cl} \frac{\mu^A \mu^B}{\mu^A + \mu^B} \quad (1)$$

и две ненулевые компоненты κ_{11} и κ_{33} в плоском случае, которые имеют вид

$$\kappa_{11} = \kappa_{33} = \frac{8}{\pi \beta Cl}, \quad \beta = \frac{\lambda^A + 2\mu^A}{(\lambda^A + \mu^A)\mu^A} + \frac{\lambda^B + 2\mu^B}{(\lambda^B + \mu^B)\mu^B}. \quad (2)$$

Выражаемые через константы Ляме μ^i и λ^i или плотности ρ^i . В настоящей работе проводится обобщение ПГУ [2,4,5] на случай интерфейса с трещинами различных размеров и приводятся уточнённые соотношения для жёсткости.

Следующим шагом рассматривается задача с набором из *N* интерфейсных трещин различной длины в предположении, что дефекты распределены случайным образом, а взаимодействием между трещинами можно пренебречь. Для определения рассеянного поля используется среднее по ансамблю значение как и в случае одинаковых трещин [4,5]. Для трещин разных размеров на интервале $[-x_0; x_0]$ можно ввести трещиноватость аналогично используемой для модели с одинаковыми по размеру трещинами $C_{l_j} = \sum_{j=1}^N l_j / x_0$ и выразить полный коэффициент прохождения

$$\tilde{T}^- = T^- \left(1 - \frac{i}{4} C_{l_j} K \pi l^* \right), \quad l^* = \frac{D_{l_j} + (M_{l_j})^2}{M_{l_j}}$$

через математическое ожидание и дисперсию для набора трещин

$$M_{l_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N l_j, \quad D_{l_j} = \left(\sum_{j=1}^N l_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N l_j^2 \right)^2 \right) \frac{1}{N}.$$

Аналогично схеме, применённой к интерфейсу с одинаковыми трещинами, но с большим количеством членов в разложении можно получить уточнённую жёсткость пружины для антиплоских колебаний

$$\kappa_{22} = \frac{2(1 + d_2)}{\pi C_{l_j} l^*} \frac{\mu^A \mu^B}{\mu^A + \mu^B}, \quad d_2 = \sqrt{1 + \pi K C_{l_j} l^*}. \quad (3)$$

Переходя к решению плоской задачи для коэффициента прохождения с имеем

$$\tilde{T}_s = T_s^- \left(1 - i \frac{1}{8} \pi \beta C_{l_j} H_s x_0 \right),$$

$$H_s = \frac{c_s^A c_s^B k_s^A k_s^B}{c_s^A k_s^A + c_s^B k_s^B}, \quad k_s^j = \omega \sqrt{\rho^j / c_s^j}, \quad c_3^j = \lambda^j + 2\mu^j, \quad c_1^j = \mu^j.$$

Соответственно, приравнивая коэффициенты прохождения и используя условие малости дефектов $\omega l^* \ll 1$, можно получить одинаковые константы для ПГУ

$$\kappa_{11} = \kappa_{33} = \frac{4(1 + d_1)}{\pi \beta C_{l_j} l^*}, \quad d_1 = \sqrt{1 + i \frac{\pi \beta C_{l_j} l^*}{2}}. \quad (4)$$

Можно видеть, что в частном случае одинаковых дефектов формулы (3) и (4) приближенно равны с полученным для одинаковых трещин (1), (2) в [5]. Полное равенство не выполняется, поскольку для случая одинаковых трещин разложение по степеням коэффициента прохождения было на один порядок меньше.

2 ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ

В трёхмерном случае плотность распределения трещин $C = S_{crack}/S_{total}$ задается уже как отношение площади повреждённой (отслоившейся) области S_{crack} или суммарной площади трещин к общей рассматриваемой площади S_{total} . При относительно малых размерах трещин или низких частотах может быть построено асимптотическое решение дающее простой вид для жесткостей, однако общая схема остаётся такой же как и в случае полосовых дефектов. Взаимодействием трещин можно пренебречь так как в реальных ситуациях определить точное положение всех микротрещин невозможно, поэтому используется техника усреднения по ансамблю на основе решения для одиночной круговой трещины диаметра a .

Для описания волнового поля, рассеянного круговой трещиной, выполняется переход в цилиндрическую систему координат, где компоненты вектора перемещений в каждом из полупространств $j = 1, 2$ (далее записываются в терминах потенциалов ψ_i , удовлетворяющим волновым уравнениям [6],

$$\nabla^2 \psi_{3,j} + k_{P,j}^2 \psi_{3,j} = 0, \quad \nabla^2 \psi_{i,j} + k_{S,j}^2 \psi_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2.$$

и соответствующих волновых чисел $k_{i,j}$ ($i = P, S$ для продольных и поперечных волн). Для потенциалов справедливо представление в виде рядов Фурье [7]

$$\psi_{1,j}(r, \theta, z) = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{1,j}^m(r, z) \chi_2^{l,m}(\theta), \quad \psi_{i,j}(r, \theta, z) = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{i,j}^m(r, z) \chi_1^{l,m}(\theta) \quad i = 2, 3 \quad (5)$$

$$\chi_2^{1,m}(\theta) = \chi_1^{2,m}(\theta) = \sin m\theta, \quad \chi_1^{1,m}(\theta) = -\chi_2^{2,m}(\theta) = \cos m\theta.$$

Подстановка разложений в волновые уравнения и применение интегрального преобразования Ханкеля позволяет получить следующие выражения:

$$\psi_{i,j}^m(r, z) = \int_0^{\infty} \Psi_{i,j}^m(\alpha) e^{-\sigma_{i,j}|z|} J_m(\alpha r) \alpha d\alpha \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{3,j} = \sqrt{\alpha^2 - k_{P,j}^2}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{\alpha^2 - k_{S,j}^2}, \quad \text{Im } \sigma_{i,j} \geq 0, \text{Re } \sigma_{i,j} \leq 0.$$

В терминах потенциалов в силу свойств преобразования Ханкеля гораздо удобнее использовать для круговой трещины удобно использовать вектор перемещений $\mathbf{w} = \{u_r + u_\varphi, u_r - u_\varphi, u_z\}$, а рассеянное поле

$$\mathbf{w}^{sc,lm}(r, z) = \begin{cases} \mathbf{w}_1^{sc,lm}(r, z) = \int_0^{\infty} J^m(\alpha r) K_1(\alpha, z) \mathbf{Q}^{lm}(\alpha) \alpha d\alpha, & z < 0 \\ \mathbf{w}_2^{sc,lm}(r, z) = \int_0^{\infty} J^m(\alpha r) K_2(\alpha, z) \mathbf{Q}^{lm}(\alpha) \alpha d\alpha, & z > 0 \end{cases}, \quad (6)$$

$$J^m(\alpha r) = \begin{pmatrix} J_{m+1}(\alpha r) & 0 & 0 \\ 0 & J_{m-1}(\alpha r) & 0 \\ 0 & 0 & J_m(\alpha r) \end{pmatrix}$$

может быть записано в компактном виде через матрицы Грина $K_j(\alpha, z)$

$$K_j(\alpha, z) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} [-M_j(\alpha, z) + N_j(\alpha, z)] & \frac{i}{2} [M_j(\alpha, z) + N_j(\alpha, z)] & \alpha P_j(\alpha, z) \\ \frac{i}{2} [M_j(\alpha, z) + N_j(\alpha, z)] & \frac{i}{2} [-M_j(\alpha, z) + N_j(\alpha, z)] & -\alpha P_j(\alpha, z) \\ -\frac{i}{2} \alpha S_j(\alpha, z) & \frac{i}{2} \alpha S_j(\alpha, z) & R_j(\alpha, z) \end{pmatrix}.$$

Векторы $\{P_j(\alpha, z), 0, R_j(\alpha, z)\}$, $\{M_j(\alpha, z), 0, S_j(\alpha, z)\}$ – антисимметричные фундаментальные решения для полупространств в плоском случае, а $\{0, N_j(\alpha, z), 0\}$ – в антиплоском [1]:

$$\begin{aligned} M_j(\alpha, z) &= (-1)^{j+1} \frac{i\mu_j \sigma_{1,j}}{\Delta_j} [\eta_j e^{-\sigma_1|z|} - 2\alpha^2 e^{-\sigma_{3,j}|z|}], \\ S_j(\alpha, z) &= -\frac{i\mu_j}{\Delta_j} [\eta_j e^{-\sigma_{1,j}|z|} - 2\sigma_{1,j} \sigma_{3,j} e^{-\sigma_{3,j}|z|}], \quad P_j(\alpha, z) = \frac{\mu_j}{\Delta_j} [2\sigma_{1,j} \sigma_{3,j} e^{-\sigma_{1,j}|z|} - \eta_j e^{-\sigma_{3,j}|z|}], \\ R_j(\alpha, z) &= (-1)^j \frac{\mu_j \sigma_{3,j}}{\Delta_j} [\alpha^2 e^{-\sigma_{1,j}|z|} - \eta_j e^{-\sigma_{3,j}|z|}], \quad N_j(\alpha, z) = (-1)^j \frac{i}{\mu_j \sigma_{1,j}} e^{-\sigma_{1,j}|z|}, \\ \eta_j &= 2\alpha^2 - k_{S,j}^2 \end{aligned}$$

Подстановка интегральных представлений (6) в условия отсутствия напряжений на трещине приводит к системе интегральных уравнений

$$\int_0^\infty J^m(\alpha r) L(\alpha) \Delta \mathbf{W}^{lm}(\alpha) \alpha d\alpha = -i c_s^1 k_s^1 (1 - R_s^-) \tilde{\mathbf{q}}_s^{lm}, \quad L(\alpha) = [K_1(\alpha, 0) - K_2(\alpha, 0)]^{-1}. \quad (7)$$

относительно компонент скачка смещений берегов трещины

$$\Delta \mathbf{w}^{lm}(r) = \mathbf{w}_1^{\text{sc},lm}(r, 0^-) - \mathbf{w}_2^{\text{sc},lm}(r, 0^+) \quad (8)$$

Здесь коэффициенты определяются путем разложения падающего волнового поля в ряд аналогично разложениям (5), которые для каждого из типов падающих плоских волн $s = P, S$ имеют вид

$$\tilde{\mathbf{q}}_P^{lm} = \begin{cases} (0, 0, 1), & l = 1, m = 0 \\ (0, 0, 0), & \text{иначе} \end{cases} \quad \tilde{\mathbf{q}}_S^{lm} = \begin{cases} (0, 2, 0), & l = 1, m = 1 \\ (0, 0, 0), & \text{иначе} \end{cases}$$

Скачок $\mathbf{w}$ отыскиваются в виде разложения по полиномам Лежандра P_j^m и сводится к схеме Галёркина [7]:

$$\Delta \mathbf{w}_k^{lm}(r, \varphi) = \sum_{j=0}^\infty c_{k,j}^{lm} \psi_{k,j}^m(r) \quad (9)$$

Для распределённого набора трещин в дальней от интерфейса зоне рассеянное поле представляется в виде плоских волн распространяющихся в направлении $\pm z$:

$$\langle \mathbf{u}^{\text{sc}} \rangle = \mathbf{p}^s \begin{cases} P_s^- e^{-ik_s^1 z}, & z < 0 \\ P_s^+ e^{ik_s^2 z}, & z > 0 \end{cases} \quad (10)$$

Можно применить теорему Бетти-Рэлея для двух состояний упругой среды $\mathbf{u}^{sc}$ и $\mathbf{u}^{in}$ в каждом из полупространств

$$\int_S [\mathbf{u}_i^{in} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}^{sc} - \mathbf{u}_i^{sc} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}^{in}] n_j dS = 0.$$

В качестве контура S^- выбирается параллелепипед с центром на интерфейсе и вершинами в точках $(\pm x_0, \pm y_0, 0^-)$, $(\pm x_0, \pm y_0, z_0)$ и симметричным ему прямоугольником с вершинами в точках $(\pm x_0, \pm y_0, 0^+)$, $(\pm x_0, \pm y_0, -z_0)$. В таком случае интегралы ненулевой вклад дают лишь два члена (аналогично антиплоскому и плоскому случаю), соответственно после несложных преобразований для амплитуды рассеянного поля справедливо

$$P_s^- = -\frac{1}{2}(1 - R_s^-)C \mathbf{p}^s \cdot \bar{\mathbf{v}}^s.$$

Аналогично может быть рассчитана и амплитуда P_s^+ для чего падающее поле заменяется на поле в отсутствии трещины, возбуждаемое при падении на интерфейс из верхнего полупространства с коэффициентами

$$R_s^+ = -R_s^-, \quad T_s^+ = 1 + R_s^-.$$

Отсюда нетрудно получить выражение для полного коэффициента прохождения

$$\tilde{T}_s = T_s^- + P_s^+ = T_s^- \left(1 - \frac{1}{2} C \mathbf{p}^s \cdot \bar{\mathbf{v}}^s \right), \quad (11)$$

которое выражается через плотность распределения трещин среднее значение скачка смещений $\mathbf{v}$ на трещине, взятой в качестве эталонной. Скачок $\mathbf{v}$ строится путём перевода вектора перемещений (8) для одиночной круговой трещины $\mathbf{w}$ в декартову систему координат из цилиндрической.

Для описания рассеяния на произвольном распределении трещин можно ввести эквивалентные им по дифракционным свойствам пружинные граничные условия:

$$\boldsymbol{\tau}^1 = \boldsymbol{\tau}^2 = \kappa (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2). \quad (12)$$

Здесь κ – квадратная диагональная матрица размерности 3 в изотропном случае, с жёсткостями определяемыми ниже путем приравнивания коэффициентов прохождения для распределения трещин и для пружинных граничных условий. Из рассмотрения падающей под прямым углом к интерфейсу Р-волн (см. предыдущие подразделы) может быть определена константа κ_{33} , а затем аналогично для S-волн с углом поляризации $\theta = \{0^\circ, 90^\circ\}$ тангенциальные компоненты $\kappa_{11} = \kappa_{22}$.

Итак, для волнового поля с учетом пружинных граничных условий на интерфейсе в трехмерном случае справедливо представление

$$\mathbf{u}^s = \begin{cases} \mathbf{p}^s (e^{ik_s^1 z} + \hat{R}_s e^{-ik_s^1 z}), & z < 0, \\ \mathbf{p}^s \hat{T}_s e^{ik_s^2 z}, & z > 0, \end{cases} \quad (13)$$

где коэффициенты прохождения и отражения нетрудно определить:

$$\hat{R}_s^- = \frac{i c_s^1 k_s^1 c_s^2 k_s^2 + \kappa_s (c_s^1 k_s^1 - c_s^2 k_s^2)}{i c_s^1 k_s^1 c_s^2 k_s^2 + \kappa_s (c_s^1 k_s^1 + c_s^2 k_s^2)}, \quad \hat{T}_s^- = \frac{2 \kappa_s c_s^1 k_s^1}{i c_s^1 k_s^1 c_s^2 k_s^2 + \kappa_s (c_s^1 k_s^1 + c_s^2 k_s^2)}.$$

Индекс $s = 1, 2$ обозначает как и ранее падающие Р и S волны. Приравнивая коэффициенты прохождения $\hat{T}_s^-$ и (11) можно получить значения для κ_s

$$\kappa = \frac{2i}{C \mathbf{p}^s \cdot \bar{\mathbf{v}}^s} \frac{c_s^1 k_s^1 c_s^2 k_s^2}{c_s^1 k_s^1 + c_s^2 k_s^2}. \quad (14)$$

Разработанный подход может быть развит для анизотропных сред, в этом случае матрица жёсткостей будет иметь ненулевые внедиагональные элементы, а также может быть учтено влияние расположения трещин вдоль осей координат, т.е. плотности распределения по направлениям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные соотношения могут служить для решения обратных задач о степени отслоения (идеальности контакта) в слоистых композитах при известных законах распределения характерных усталостных дефектов. Кроме того, возможно построение асимптотического решения для одиночной круговой трещины, позволяющего получить достаточно простое аналитическое выражение для жёсткостей в трёхмерном случае.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №12-01-33011-мол_а_вед).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
2. Baik J. M., Thompson R. B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model // Journal Nondestructive Evaluation. – 1984. – 4. – P. 177–196.
3. Ueda S., Biwa S., Watanabe K., Heuer R., Pecorari C. On the stiffness of spring model for closed crack // International Journal of Engineering Science. – 2006. – 44. – P. 874–888.
4. Boström A., Golub M. Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 2009. – 62. – P. 39–52.
5. Golub M.V., Boström A. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves // Wave Motion. – 2011. – 48(2). – P. 105–115.
6. Гринченко В. Г., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова Думка, 1981. – 284 с.
7. Krenk S., Schmidt H. Elastic Wave Scattering by a Circular Crack // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1982. – 308. – P. 167–198.