АПРОКСИМАЦІЯ ЩІЛЬНОСТЕЙ ІМОВІРНОСТІ АКУСТИЧНИХ ФЛУКТУАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВІДРІЗКАМИ ОРТОГОНАЛЬНИХ РЯДІВ

В. С. БЕРЕГУН

Національний технічний університет України ”КПІ”, Київ

Показано можливості використання відрізків ортогональних рядів для аналізу щільностей імовірності акустичних флуктуаційних процесів та їх функціональних перетворень. Досліджено як помилки, що виникають при апроксимації теоретичних щільностей імовірності, так і при оцінці щільностей імовірності на основі експериментальних даних.

ВСТУП

До флуктуаційних процесів відносяться [1, 2] випадкові відхилення фізичних величин від їх середніх зрівноважених значень. Такі процеси зазвичай формуються досліджуваними об’єктами в результаті їх природного функціонування. До акустичних флуктуаційних процесів відносяться сигнали неруйнівного контролю (сигнали акустичної емісії, шуми кавітації, віброакустичні шуми), гідроакустичні сигнали (шуми реверберації, шуми моря), акустичні біомедичні сигнали (шуми дихання, шуми серця, шуми колінних суглобів) та ін.

Математичні моделі акустичних флуктуаційних процесів [2–5] описують їх миттєві значення як суму випадкової кількості елементарних імпульсів. Так, на основі моделі Бунімовича–Райса отримуємо флуктуаційний процес:

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}\eta_k h(t-t_k), \tag{1}$$

де $N(t)$ – однорідний процес Пуассона з інтенсивністю λ; $h(t)$ – форма елементарних імпульсів, детермінована функція; t_k – випадкові моменти часу появи імпульсів; η_k – амплітуди елементарних імпульсів, взаємонезалежні однаково розподілені випадкові величини, які не залежать від t_k.

Характерною особливістю флуктуаційних процесів є [2] широкосмуговість, часто вони є нестаціонарними випадковими процесами. Такі процеси мають безмежно подільні закони розподілу, окремим випадком яких є гауссівський розподіл. Для знаходження їх законів розподілу в явному вигляді необхідно застосовувати наближені методи.

Для знаходження щільності імовірності наближеними методами найбільш доцільним є використання апроксимативних методів, а саме ортогональних подань [6–8], оскільки вони дозволяють враховувати моменти процесу всіх порядків, в той час як топографічні методи (розподіли Пірсона, Джонсона) використовують тільки перші чотири моменти, що призводить в окремих випадках до значних помилок.

В даній роботі викладено загальні положення ортогональних подань щільності імовірності, описано помилки апроксимації щільності імовірності відрізками ортогональних рядів, розглянуто знаходження щільностей імовірності типових моделей акустичних флуктуаційних процесів, наведено результати статистичного аналізу шумів колінних суглобів.

1. ОРТОГОНАЛЬНІ ПОДАННЯ ЩІЛЬНОСТІ ІМОВІРНОСТІ

Нехай випадковий флуктуаційний процес $\xi(t)$ є стаціонарним і має теоретичну щільність імовірності $p(x)$. Дану щільність імовірності можна подати у вигляді нескінченного ряду

$$p(x)=\rho(x)\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x), \tag{2}$$

де c_k – коефіцієнти розкладу, $\varphi_k(x)$ – система ортогональних функцій, $\rho(x)$ – вагова функція.

Зазвичай як функції $\varphi_k(x)$ використовують поліноми

$$\varphi_k(x)=\sum_{j=0}^{k}h_{kj}x^j,$$

де h_{kj} – дійсні числа, що однозначно визначаються ваговою функцією $\rho(x)$.

В цьому випадку коефіцієнти розкладу c_k знаходяться без знання щільності імовірності $p(x)$ лише за відомими початковими моментами α_j процесу $\xi(t)$:

$$c_k=\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\varphi_k(x)dx=\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\sum_{j=0}^{k}h_{kj}\alpha_j,$$

де $\|\varphi_k\|$ – норма функцій $\varphi_k(x)$.

В роботі [9] на основі аналізу розв'язків рівняння Пірсона обґрунтовано використання класичних ортогональних поліномів як функцій $\varphi_k(x)$ для ортогональних подань щільності імовірності. Так, для процесів, що мають значення на нескінченній осі чисел $(-\infty;\infty)$ використовуються поліноми Ерміта, для процесів, що мають значення на півнескінченній осі чисел $(0;\infty)$ використовуються поліноми Лагерра, для процесів, що мають значення на обмеженому інтервалі чисел $[a;b]$ використовуються поліноми Якобі (окремими випадками яких є поліноми Лежандра та Чебишова першого і другого роду).

Оскільки коефіцієнти розкладу c_k є функціями початкових моментів, то подання (2) можна переписати у вигляді

$$p(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_jQ_j(x), \tag{3}$$

де $Q_j(x)$ – базисні функції, які визначаються ваговою функцією $\rho(x)$ і є незмінними для довільних випадкових процесів.

При практичних застосуваннях в поданнях (2) і (3) використовується скінченна кількість складових, що називається відрізком ортогонального ряду.

Для запропонованого подання (3) отримано явні вирази базисних функцій $Q_k^{(N)}(x)$ при врахуванні N складових ряду (2). Це дозволяє здійснювати подання для щільностей імовірності, які визначені на інтервалах $(-\infty;\infty)$, $(0;\infty)$ та $[a;b]$.

Використання вищенаведених вагових функцій дозволяє здійснювати ортогональні подання стандартних щільностей імовірності $p(x)$, які подібні ваговим функціям $\rho(x)$. В загальному випадку досліджувані щільності імовірності необхідно узгодити зі стандартними шляхом лінійних перетворень:

1) приведенням випадкового процесу загального виду до випадкового процесу стандартного виду $\xi(t)$ зі щільністю імовірності $p(x)$;

2) перетворенням ортогонального подання стандартного випадкового процесу $\xi(t)$ до подання процесу загального виду.

Систематизовано і доповнено розрахункові формули для знаходження коефіцієнтів (по шостий включно) розкладу щільності імовірності в ряди як самих флуктуаційних процесів так і їх лінійних перетворень загального виду, причому для рядів Лежандра і Чебишова другого роду це зроблено уперше.

Подальше використання ортогональних подань щільності імовірності в практичних задачах потребує вирішення ряду проблем, серед яких найважливішими є аналіз точності використання відрізків ортогонального ряду, з’ясування умов отримання невід’ємних значень подання, дослідження імовірнісних характеристик оцінки щільності імовірності та ін.

2. ДОСЛІДЖЕННЯ ПОМИЛОК АПРОКСИМАЦІЇ

Для покращення збіжності ортогональних подань щільності імовірності запропоновано [10] використання методів узагальненого додавання за допомогою суми Фейєра $F_k(x) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} S_i(x)}{k}$ та суми Валле-Пуссена $V_k(x) = \frac{\sum_{i=k}^{2k-1} S_i(x)}{k}$, де $S_i(x) = \rho(x)\sum_{j=0}^{i} c_j \varphi_j(x)$ – відрізок ряду (2).

Досліджено помилки апроксимації відрізками ортогональних рядів та узагальненими сумами щільностей імовірності типових теоретичних розподілів: Стьюдента, суміші гауссівських розподілів, гамма-розподілу – рядами Ерміта; розподілів Релея та Вейбулла – рядами Лагерра; бета-розподілів – рядами Якобі. Отримані результати показали, що використання узагальнених сум частіше забезпечує кращу апроксимацію для щільностей імовірності, визначених на нескінченному чи півнескінченному інтервалах чисел, а використання відрізків ортогональних рядів – для щільностей імовірності, визначених на обмеженому інтервалі чисел.

Таблиця 1 Помилки апроксимації щільності імовірності розподілу Релея

Помилка	S_4	S_5	S_6	F_5	F_6	F_7	V_3
r	0,0679	0,0595	0,0589	0,0933	0,0759	0,0625	0,0572
ε	0,0682	0,0649	0,0628	0,0849	0,0776	0,0714	0,0631

Як приклад в табл. 1 наведено помилки апроксимації теоретичної щільності імовірності розподілу Релея рядами по поліномах Лагерра – інтегральну помилку $r = \int_X \left| p(x) - p_N(x) \right| dx$ та максимальну помилку $\varepsilon = \max_X \left| p(x) - p_N(x) \right|$, де $p_N(x)$ – відповідна апроксимація як відрізками $S_k(x)$, так і узагальненими сумами $F_k(x)$ та $V_k(x)$.

При використанні відрізків ортогональних рядів важливо з'ясувати умови, за яких будуть відсутні від'ємні значення подання. Методами математичного моделювання отримано [11] області невід'ємності для рядів Ерміта (4 і 6 складових) і Лагерра (4 складових). Отримані області невід'ємності дозволяють практично з'ясувати можливість використання ортогональних апроксимацій в залежності від конкретних значень кумулянтних коефіцієнтів γ_k, що є функціями від моментів.

Запропоновано метод топографічного зображення помилок апроксимації при ортогональних поданнях щільності імовірності [12], що дозволяє обирати вид ортогонального ряду (ортогональні поліноми) та кількість його складових виходячи з наперед заданої допустимої помилки.

Суть методу полягає у знаходженні таких областей на площині (β_1, β_2), $\beta_1 = \gamma_3^2$, $\beta_2 = \gamma_4 + 3$, γ_3 – коефіцієнт асиметрії, γ_4 – коефіцієнт ексцесу, де забезпечуються помилки не більші за допустимі.

3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИКОРИСТАННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОДАНЬ

З використанням виразу (3) запропонована оцінка щільності імовірності

$$\overline{p}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\alpha}_j Q_j(x),$$

де $\overline{\alpha}_j$ – оцінка початкового моменту j-го порядку по вибірці об'єму n.

Отримано [13] імовірнісні характеристики такої оцінки: математичне сподівання $m(x) = M\left\{\overline{p}(x)\right\} = p(x)$; дисперсія $\sigma^2(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} R_{jr} Q_j(x) Q_r(x)$, де $R_{jr} = R\left\{\overline{\alpha}_j, \overline{\alpha}_r\right\} = \frac{1}{n}\left(\alpha_{j+r} - \alpha_j \alpha_r\right)$ – кореляційний момент оцінок початкових моментів. Отримані імовірнісні характеристики дали можливість встановити незсуненість, слушність та нормальність запропонованої оцінки щільності імовірності.

Для типової моделі (1) сигналів акустичної емісії та шумів кавітації з експоненційною, експоненційно-степеневою, експоненційно-синусною формами елементарних імпульсів $h(t)$ в явному вигляді отримано [14] теоретичні та експериментальні щільності імовірності та досліджено помилки оцінювання, що підтверджує достовірність отриманих теоретичних результатів.

На рис. 1 для процесу Бунімовича–Райса (1) наведено теоретичну щільність імовірності (суцільною лінією), одну з оцінок щільності імовірності (пунктирною лінією) та відповідну їй гістограму; на рис. 2 наведено граничні області $m(x) \pm 3\sigma(x)$ інтервальних оцінок щільності імовірності з імовірністю 0,9973 (штриховими лініями) і оцінки щільності імовірності для ансамблю з 30-и реалізацій при експоненційній формі елементарних імпульсів

$$h(t) = A\exp(-t/\tau_0)E(t),$$

де A – амплітуда імпульсу, τ_0 – ефективна тривалість імпульсу, $E(t)$ – функція Хевісайда, з параметрами A=1 і τ_0=1 мкс для значення $\lambda\tau_0 = 5$ ($\lambda = 5\cdot 10^6$ с$^{-1}$).

В роботі [15] проведено статистичний аналіз шумів колінних суглобів. З метою отримання діагностичних ознак були вибрані згладжені фоноартрограми, що являють собою залежності миттєвих значень шуму і рівнів звукового тиску від кутового переміщення суглобу.

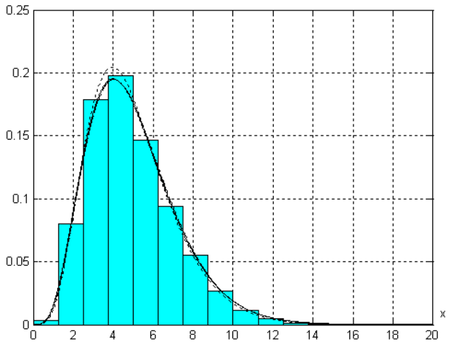

Рис. 1

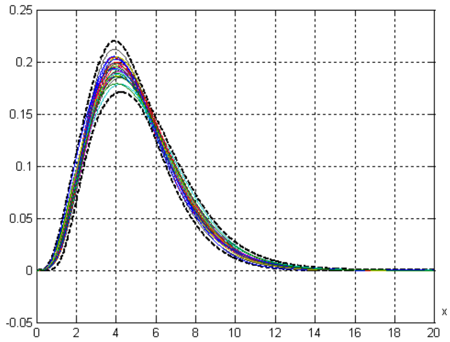

Рис. 2

На рис. 3 наведено оцінки щільності імовірності відрізків фоноартрограми для рівнів звукового тиску, що визначають характерні види сигналу («норма», «ромб», «клік»), на основі яких встановлюється діагноз.

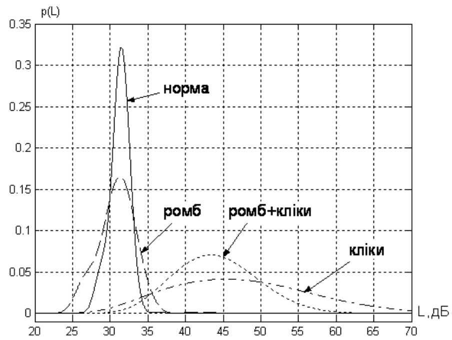

Рис. 3

Щільності імовірності рівнів звукового тиску для повної тривалості записів мають такі особливості: для норми – нахил вправо (від’ємна асиметрія), для артрозів – нахил вліво; для характерних відрізків записів – поява імпульсів призводить до значного розширення фронтів і більшої симетричності щільності імовірності.

Отримані результати дозволили виявити інформативність кумулянтних коефіцієнтів і щільності імовірності миттєвих значень та рівнів звукового тиску, сформулювати діагностичні ознаки для визначення норми і патологій.

ВИСНОВКИ

1. Для дослідження щільностей імовірності акустичних флуктуаційних процесів використано відрізки ортогональних рядів по класичних ортогональних поліномах – Ерміта, Лагерра та Якобі. Обґрунтовано вибір поліномів в залежності від області значень процесів, розраховано коефіцієнти розкладу.

2. Досліджено помилки, що виникають при апроксимації щільностей імовірності типових розподілів акустичних флуктуаційних процесів. Визначено умови, за якими використання відрізків ортогональних рядів не призводить до отримання від’ємних значень. Використано метод узагальненого додавання, що дало можливість в окремих випадках зменшити помилку апроксимації. Запропоновано топографічний метод зображення помилок апроксимації щільностей імовірності, що дозволяє обирати вид ортогональних поліномів та кількість складових відрізка ортогонального ряду.

3. Отримано імовірнісні характеристики оцінки щільності імовірності – математичне сподівання та дисперсію, що було перевірено проведенням експериментальних досліджень щільностей імовірності типових розподілів.

4. Розраховано щільності імовірності акустичних флуктуаційних процесів на основі моделі Бунімовича–Райса при різних формах елементарних імпульсів. Знайдено щільності імовірності шумів колінних суглобів, що дозволило встановити ряд діагностичних ознак для норми та патологій.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
2. *Горовецкая Т. А., Красильников А. И., Чан Хыу Дат.* Модели и законы распределения флуктуационных сигналов // Электроника и связь. – 2000. – № 9. – С. 5–14.
3. *Трипалин А. С., Буйло С. И.* Акустическая эмиссия. Физико-механические аспекты. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1986. – 160 с.
4. *Марченко Б. Г., Мыслович М. В.* Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. – К.: Наукова думка, 1992. – 196 с.
5. *Горовецкая Т. А., Красильников А. И., Тимофеенко Б. В*. Вероятностные характеристики кавитационного шума // Электроника и связь. – 2001. – № 11. – С. 91–94.
6. *Крамер Г.* Математические методы статистики / пер. с англ. А.С. Монина и А.А. Петрова; под. ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
7. *Дёч Р.* Нелинейные преобразования случайных процессов / пер. с англ. Б.А. Смиренина; под ред. Б.Р. Левина. – М.: Сов. радио, 1965. – 208 с.
8. *Берегун В. С., Красильніков О. І.* Апроксимативні методи знаходження щільності імовірностей // Электроника и связь. – 2010. – № 4 (57). – С. 51–55.
9. *Красильніков О. І., Берегун В. С.* Систематизація ортогональних подань щільності імовірності випадкових процесів // Електроніка та системи управління. – 2010. – № 3 (25). – С. 28–35.
10. Берегун В.С. Дослідження щільностей імовірностей акустичних сигналів методом ортогональних подань / Автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.09.08 / НТУУ «КПІ». – К., 2010. – 19 с.
11. *Берегун В. С., Красильніков О. І.* Дослідження областей невід’ємності при ортогональних поданнях щільності імовірностей // Электроника и связь. – 2010. – № 3 (56). – С. 73–78.
12. *Берегун В. С., Красильніков О. І.* Аналіз помилок ортогональних подань щільностей імовірності з використанням їх топографічних зображень // Электроника и связь. – 2010. – № 6 (59). – С. 106–112.
13. *Берегун В. С., Красильніков О. І.* Помилки експериментального визначення щільності імовірностей ергодичних випадкових процесів при їх ортогональному поданні // Электроника и связь. – 2009. – № 1 (48). – С. 39–45.
14. *Красильников А. И., Берегун В. С.* Применение метода ортогональных представлений для нахождения плотностей вероятности типовых моделей флуктуационных сигналов // Радиоэлектроника. – 2011. – **54**, № 11. – С. 13–21. – (Известия вузов).
15. *Берегун В. С., Горовецька Т. А., Красильніков О. І.* Статистичний аналіз шумів колінних суглобів // Акустичний вісник. – 2011. – **14**, № 2. – С. 3–15.