

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ ИЗ ВЫСОКОПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ

А. В. НАСЕДКИН

*Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: nasedkin@math.sfedu.ru*

ВВЕДЕНИЕ

В решении проблемы энергосбережения важен поиск новых альтернативных источников энергии и соответствующих преобразователей для их реализации. Перспективными представляются пьезоэлектрические преобразователи, генерирующие электрические заряды при переменном механическом воздействии. На основе явления пьезоэффекта успешно работают многие пьезоэлектрические устройства. Однако для получения пьезогенерацией электрической энергии, представляющей практический интерес, пьезокерамика должна работать в условиях значительных механических и электрических напряжений, что снижает ее работоспособность.

В настоящей работе изучается возможность применения для пьезогенерации электрической энергии пьезокомпозитов из высокопористой пьезокерамики, которая характеризуется высокой пьезочувствительностью в широкой полосе частот, быстро возрастающей с повышением пористости. Это делает ее перспективной для преобразования в электроэнергию низкочастотной вибрации и даже разовых механических воздействий, например, при нагружении пьезокерамики от движения пешеходов или транспортных средств. В работе осуществлено компьютерное моделирование пьезопреобразователей на основе пористой керамики с использованием современных конечно-элементных технологий и проведено исследование композитных пьезогенераторов из пористой пьезокерамики.

1 ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД

Пусть Ω – область, занимаемая пьезоэлектрическим материалом (возможно, с порами); $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области; \mathbf{n} – вектор внешней единичной нормали к Γ ; $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор пространственных координат; t – время. В качестве основных переменных для пьезоэлектрической среды примем вектор механических перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и электрический потенциал $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$.

Для удобства будем использовать векторно-матричные обозначения для тензорных величин. Введем в рассмотрение (псевдо-) вектор деформаций $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}$ и (псевдо-) вектор напряжений $\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$, где $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – компоненты тензора деформаций, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. По \mathbf{u} и φ можно соответственно определить вектор деформаций \mathbf{S} и вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} следующим образом:

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (1)$$

$$\mathbf{L}^*(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

В линейном приближении примем следующие определяющие соотношения для пьезоэлектрической среды:

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot (\mathbf{S} + \beta_d \dot{\mathbf{S}}) - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \quad (4)$$

где \mathbf{D} – вектор электрической индукции; \mathbf{c}^E – 6×6 матрица упругих жесткостей, измеренных при постоянном электрическом поле; \mathbf{e} – 3×6 матрица пьезомодулей; $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ – 3×3 матрица диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянных деформациях; β_d – неотрицательный коэффициент демпфирования.

Для динамических задач с учетом демпфирования можно записать следующую систему полевых уравнений

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma_\Omega, \quad (6)$$

где ρ – плотность материала; \mathbf{f} – вектор плотности массовых сил; α_d – дополнительный неотрицательный коэффициент демпфирования; σ_Ω – объемная плотность электрических зарядов (обычно, $\mathbf{f} = 0$, $\sigma_\Omega = 0$).

В (1)–(6) для пьезоэлектрического материала принят способ учета затухания по Рэлею, подходящий для многих практических применений [1]. К системе (1)–(6) необходимо также присовокупить граничные и начальные (для нестационарных задач) условия. Отметим, что электрические граничные условия обычно включают условия эвклипотенциальности на электродированных поверхностях и интегральные условия на электродах, запитываемых генераторами зарядов или токов.

Формулы (1)–(6) вместе с подходящими граничными и начальными условиями составляют классические постановки линейных задач электроупругости (пьезоэлектричества) со способом учета демпфирования по Рэлею.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРИСТЫХ ПЬЕЗОКОМПОЗИТОВ МЕТОДОМ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ

2.1 Математические аспекты методы эффективных модулей

Для моделирования пористых пьезокомпозиов будем использовать метод эффективных модулей [2] и конечно-элементные технологии аналогично [3,4]. Как обычно, будем обозначать в угловых скобках осредненные по объему величины:

$\langle \dots \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\dots) d\Omega$. Пусть Ω – представительный объем неоднородного пьезокомпозиита.

Эффективные модули $\mathbf{c}^{E\text{eff}}$, \mathbf{e}^{eff} , $\boldsymbol{\varepsilon}^{S\text{eff}}$ будем определять, используя методологию [2–4]. Рассмотрим статическую задачу электроупругости для представительного объема Ω :

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega. \quad (8)$$

Задачу (1)–(4) с $\beta_d = 0$, (7), (8) назовем $u\varphi$ -задачей, а решение этой задачи обозначим через $\mathbf{u}^{u\varphi}$, $\varphi^{u\varphi}$. Из этого решения и (1)–(4) при $\beta_d = 0$ можно найти $\mathbf{S}^{u\varphi}$, $\mathbf{E}^{u\varphi}$, $\mathbf{T}^{u\varphi}$ и $\mathbf{D}^{u\varphi}$, где $\mathbf{S}^{u\varphi} = \mathbf{S}(\mathbf{u}^{u\varphi})$, $\mathbf{E}^{u\varphi} = \mathbf{E}(\varphi^{u\varphi})$, $\mathbf{T}^{u\varphi} = \mathbf{T}(\mathbf{u}^{u\varphi}, \varphi^{u\varphi})$, $\mathbf{D}^{u\varphi} = \mathbf{D}(\mathbf{u}^{u\varphi}, \varphi^{u\varphi})$.

С использованием подходящего набора решений этих задач можно определить полный набор эффективных модулей пористого пьезокомпозиата. Так, пьезокерамика, поляризованная в направлении оси x_3 , является анизотропным материалом кристаллографического класса bmm и имеет 10 независимых модулей (5 упругих, 3 пьезоэлектрических и 2 диэлектрических модулей). Для этого случая полный набор эффективных модулей можно найти из решения пяти $u\varphi$ -задач с различными видами граничных условий в (8) и определить из совокупности решений этих задач полный набор эффективных модулей:

$$\text{I-}u\varphi. \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \Rightarrow c_{1j}^{E, \text{eff}, u\varphi} = \langle \sigma_{jj}^{u\varphi} \rangle / \varepsilon_0; \quad j = 1, 2, 3; \quad e_{31}^{\text{eff}, u\varphi} = \langle D_3^{u\varphi} \rangle / \varepsilon_0, \quad (9)$$

$$\text{II-}u\varphi. \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \Rightarrow c_{j3}^{E, \text{eff}, u\varphi} = \langle \sigma_{jj}^{u\varphi} \rangle / \varepsilon_0; \quad j = 1, 2, 3; \quad e_{33}^{\text{eff}, u\varphi} = \langle D_3^{u\varphi} \rangle / \varepsilon_0, \quad (10)$$

$$\text{III-}u\varphi. \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{E}_0 = 0 \Rightarrow c_{44}^{E, \text{eff}, u\varphi} = \langle \sigma_{23}^{u\varphi} \rangle / (2\varepsilon_0); \quad e_{15}^{\text{eff}, u\varphi} = \langle D_2^{u\varphi} \rangle / (2\varepsilon_0), \quad (11)$$

$$\text{IV-}u\varphi. \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1 \Rightarrow e_{15}^{\text{eff}, u\varphi} = -\langle \sigma_{13}^{u\varphi} \rangle / E_0; \quad \varepsilon_{11}^{S, \text{eff}, u\varphi} = \langle D_1^{u\varphi} \rangle / E_0, \quad (12)$$

$$\text{V-}u\varphi. \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_3 \Rightarrow e_{3j}^{\text{eff}, u\varphi} = -\langle \sigma_{jj}^{u\varphi} \rangle / E_0; \quad j = 1, 2, 3; \quad \varepsilon_{33}^{S, \text{eff}, u\varphi} = \langle D_3^{u\varphi} \rangle / E_0. \quad (13)$$

2.2 Моделирование представительных объемов и результаты расчетов

В качестве представительных объемов Ω пористого пьезоматериала в идеале следует брать области, достаточно большие по сравнению с размерами неоднородностей (т.е. пор), но малые по сравнению с расстояниями, на которых существенно меняются осредняемые величины. Одна из подходящих модель 3-3 связности строится следующим образом [4]. В качестве объема Ω рассматривается куб, полученный транслированием вдоль трех направлений ячеек однотипной структуры. Ячейки, в свою очередь, представляют собой куб размера $10 \times 10 \times 10$, состоящий из кубических элементов (рис. 1б). В ячейке всегда присутствует каркас (рис. 1а) из параллелепипеда, представленного своими ребрами (линейные размеры указываются датчиком случайных чисел), а также из цепочек элементов, соединяющих его вершины с вершинами ячейки. Соединительные цепочки элементов также генерируются случайно. Каркас занимает по меньшей мере 10 % от общего объема ячейки и может быть дополнен элементами материала до заданного значения пористости. При этом максимально возможная пористость для данной модели составляет 90 %. Один из вариантов итогового объема Ω 3-3 связности с распределенными в нем порами представлен для пористости 90 % на рис. 1в (без пор) и на рис. 1г (с порами, показанными темным цветом).

Используя описанную модель с усложнением, связанными с учетом неоднородности поляризации керамики в окрестности пор [3,4], в результате численных

расчетов по методу конечных элементов (МКЭ) из (9)–(13) были определены эффективные свойства пористой пьезокерамики с различной степенью пористости, вплоть до 90 %. Некоторые из результатов расчетов эффективных модулей ($c_{\alpha\beta}^{E\text{eff}} = c_{\alpha\beta}^{E\text{eff},u\varphi}$, $e_{i\alpha}^{\text{eff}} = e_{i\alpha}^{\text{eff},u\varphi}$, $\varepsilon_{ij}^{S\text{eff}} = \varepsilon_{ij}^{S\text{eff},u\varphi}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$, $i, j = 1, \dots, 3$) для пористой пьезокерамики PZT-4 приведены в табл. 1 ($\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума).

На рис. 2 для пористой пьезокерамики PZT-4 3–3 связности ($20 \times 20 \times 20$ элементов) показаны зависимости от пористости основных для пьезогенераторов пьезомодулей: $r(d_{3j}) = d_{3j}^{\text{eff}} / d_{3j}$, $r(g_{3j}) = g_{3j}^{\text{eff}} / g_{3j}$ ($j = 1, 3$). Данные величины на рис. 2 отнесены к соответствующим пьезомодулям d_{3j} и g_{3j} сплошной пьезокерамики и получены из данных расчетов, следующих из (3), (4) при $\beta_d = 0$ формул

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{D}, \quad (14)$$

и известных связей между модулями в (3), (4) и (14).

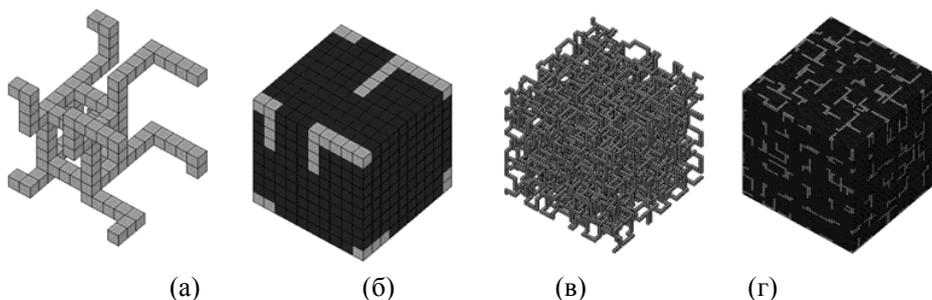


Рис. 1.

Таблица 1. Эффективные модули пористой пьезокерамики PZT-4

p (%)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
ρ , кг/м ³	7500	6750	6000	5250	4500	3750	3000	2250	1500
$c_{11}^{E\text{eff}}$, 10^{10} Н/м ²	13.9	11.57	9.23	6.85	5.05	3.31	2.08	1.27	0.68
$c_{12}^{E\text{eff}}$, 10^{10} Н/м ²	7.78	6.21	4.66	3.14	2.09	1.17	0.63	0.28	0.13
$c_{13}^{E\text{eff}}$, 10^{10} Н/м ²	7.74	5.85	4.28	2.84	1.85	1.06	0.52	0.24	0.10
$c_{33}^{E\text{eff}}$, 10^{10} Н/м ²	11.5	9.44	7.29	5.38	3.90	2.73	1.63	0.91	0.47
$c_{44}^{E\text{eff}}$, 10^{10} Н/м ²	2.56	2.21	1.84	1.45	1.09	0.73	0.44	0.23	0.10
e_{33}^{eff} , Кл/м ²	15.1	13.4	11.45	9.58	7.71	5.97	3.89	2.32	1.24
e_{31}^{eff} , Кл/м ²	-5.2	-4.2	-3.14	-2.09	-1.32	-0.74	-0.43	-0.21	-0.10
e_{15}^{eff} , Кл/м ²	12.7	10.86	8.89	6.86	5.04	3.30	1.96	0.99	0.44
$\varepsilon_{11}^{S\text{eff}} / \varepsilon_0$	730	657	588	511	438	350	265	191	121
$\varepsilon_{33}^{S\text{eff}} / \varepsilon_0$	635	564	488	415	343	271	198	130	75

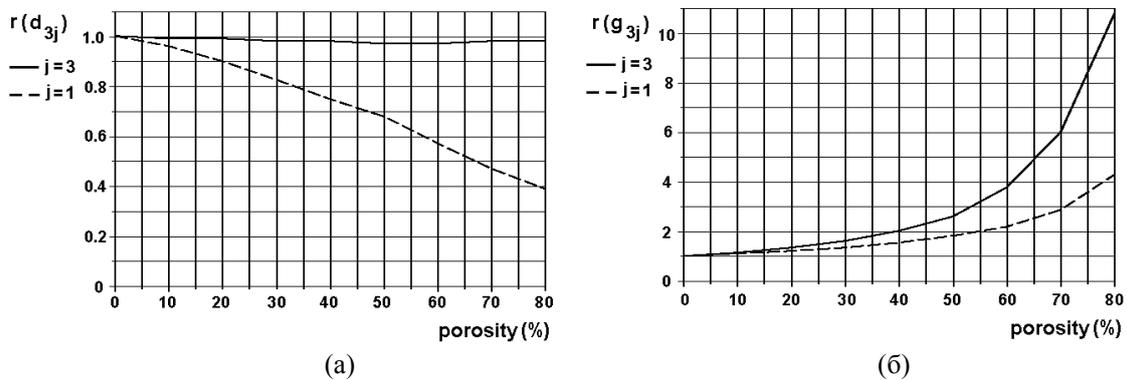


Рис. 2.

Как видно из рис. 2а, пьезомодуль d_{33}^{eff} остается практически постоянным, а пьезомодуль d_{31}^{eff} достаточно сильно убывает с ростом пористости. Подобные зависимости для различных типов пьезокерамики были также получены экспериментально в ряде работ [3,4]. Между тем, коэффициенты пьезочувствительности g_{33}^{eff} и g_{31}^{eff} возрастают с ростом пористости, причем особенно сильно для высокопористой пьезокерамики (Рис. 2б). Данные свойства пористой пьезокерамики во многом и определяют ее эффективность для многих практических применений. Действительно, из первой формулы (14) при $\mathbf{E} = 0$ имеем $\mathbf{D} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}$, т.е. электрический заряд $Q = -\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\Gamma$ пропорционален механическим напряжениям. Аналогично, из второй формулы (14) при $\mathbf{D} = 0$ имеем $\mathbf{E} = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{T}$, т.е. напряженность электрического поля и разность электрических потенциалов между электродами также пропорциональны механическим напряжениям. Зависимости эффективных модулей от пористости показывают (Рис. 2), что у высокопористой пьезокерамики эффективность генерации заряда может быть такой же, как у плотной, и при этом наведенное электрической напряжением будет значительно большим.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОКОМПЗИТНОГО КОМПЗИТА ИЗ ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ

3.1 Численные результаты для статической задачи

В качестве примера пьезоэлектрического генератора рассмотрим 1-3 пьезокомпозит, составленный из эпоксидной матрицы и периодически расположенных в ней пьезоэлектрических стержней из пористой пьезокерамики PZT-4, поляризованных по толщине. Примем, что торцевые поверхности пьезоэлектрических стержней электродированы, стержни имеют одинаковые квадратные сечения и расположены в матрице периодически на одинаковых расстояниях друг от друга по двум перпендикулярным направлениям. Для большого числа пьезоэлектрических стержней можно рассматривать только ячейку периодичности, составленную из четвертой части стержня и полимерной матрицы с половинным расстоянием между стержнями. В качестве материальных свойств полимерной матрицы из эпоксидной смолы в расчетах принималась плотность $\rho = 1.21 \cdot 10^3$ (кг/м³); модуль Юнга $E = 7.56 \cdot 10^9$ (Н/м²);

коэффициент Пуассона $\nu = 0.37$ и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 4\varepsilon_0$. Геометрические размеры были взяты следующими: толщина $h = 2.6 \cdot 10^{-3}$ (м); половина основания пьезоэлектрического стержня $a = 0.7 \cdot 10^{-3}$ (м); половина расстояния между стержнями $d = 0.3 \cdot 10^{-3}$ (м). На ячейке периодичности были приняты следующие граничные условия: нижнее основание всей ячейки считалось жестко заземленным, на верхней грани задавалось давление $F/(4ad)$, где $F = 1$ (Н); нижний электрод заземлен $\varphi = 0$; верхний электрод считался свободным ($\varphi = \text{const}$, суммарный заряд $Q = 0$) и на всех боковых поверхностях ставились условия симметрии.

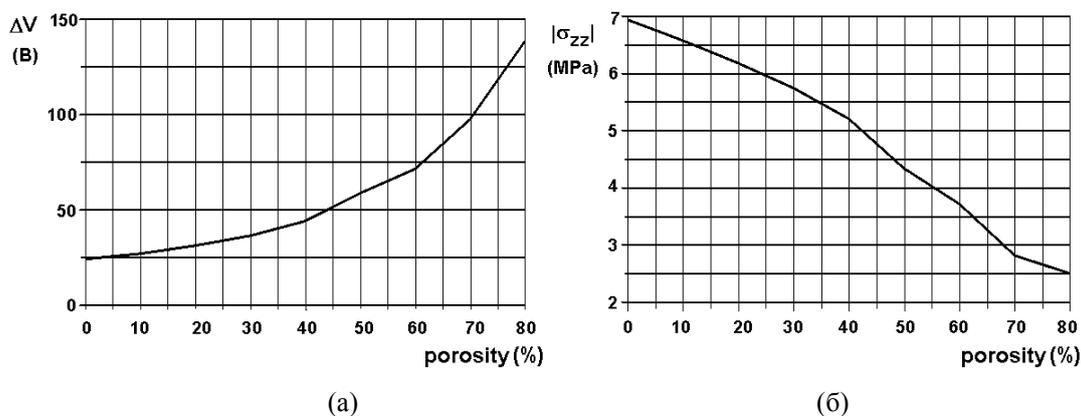


Рис. 3.

При расчетах данного пьезокомпозита вначале по описанной выше методике определялись эффективные модули пористой пьезокерамики для стержней, а затем стержни рассматривались как однородные пьезоэлектрические материалы с соответствующими эффективными модулями. Задачи (1)–(6) на ячейке периодичности решались численно по МКЭ. Некоторые из результатов решения статической задачи для 1-3 композита с пьезокерамикой PZT-4 с различной пористостью показаны на рис. 3. Как видно из рис. 3а, электрический потенциал на верхнем электроде возрастает с пористостью со средней скоростью роста коэффициентов g_{33}^{eff} и g_{31}^{eff} . Наоборот, максимальные механические напряжения $|\sigma_{zz}|$ в пьезоэлектрическом стержне (Рис. 3б) убывают с ростом пористости, но этот эффект зависит от жесткостей материалов пьезоэлектрического стержня и полимерной матрицы. В действительности, локальные механические напряжения в пористой пьезокерамике больше, так как в представленных результатах не учитывалась микроструктура материала.

В итоге можно заключить, что высокопористая пьезокерамика является эффективным материалом для квазистатических применений в пьезогенераторах, так как ее пьезочувствительность очень быстро возрастает с ростом пористости. Между тем, экспериментальные исследования показывают, что прочность пьезокерамики и ее поляризационные свойства убывают с ростом пористости. Поэтому для рассматриваемого типа пьезоэлектрического генератора оптимальным значением пористости для квазистатических применений можно признать значения в пределах 50 – 60 процентов.

3.2 Численные результаты для задачи об установившихся колебаниях

Для режима установившихся колебаний $F = 1 \cdot \exp(i2\pi ft)$ (Н) с частотой f решение задачи электроупругости (1)–(6) для 1-3 пьезокомпозита может быть также получено по МКЭ. Коэффициенты демпфирования α_d и β_d можно определить через добротность Q , используя обычные для способа учета демпфирования по Рэлею формулы [1,2] для частотного интервала (f_b, f_e) : $\alpha_d = 2\pi f_b f_e / [(f_b + f_e)Q]$; $\beta_d = 1 / [2\pi(f_b + f_e)Q]$. При этом добротность Q для пьезокомпозита задавалась близкой к данным экспериментов.

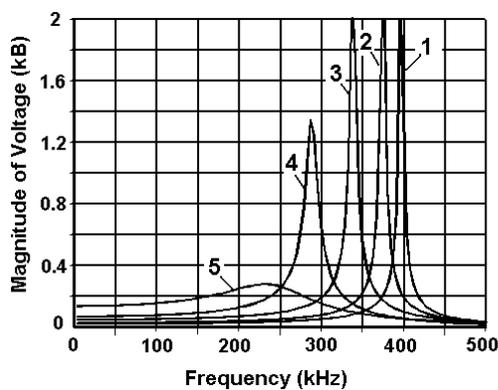


Рис. 4.

На рис. 4 показаны зависимости от частоты наведенного электрического потенциала на верхнем электроде для пористой пьезокерамики PZT-4 для пяти значений пористости p (в процентах) и значений добротности Q (1 – $p = 0$, $Q = 70$; 2 – $p = 20$, $Q = 50$; 3 – $p = 40$, $Q = 30$; 4 – $p = 60$, $Q = 10$; 5 – $p = 80$, $Q = 1$). Как можно видеть, рассматриваемый тип пьезогенератора демонстрирует широкополосность в диапазоне до 200 кГц и высокие значения наведенного потенциала для пьезокерамики с 40 – 80 процентами пористости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в работе были построены математические модели высокопористой пьезокерамики, проанализированы их эффективные характеристики и использованы конечно-элементные технологии для исследования композитного 1-3 пьезоэлектрического генератора из пористой пьезокерамики. Из полученных конечно-элементных результатов и экспериментальных исследований можно заключить, что рассматриваемые типы пьезоэлектрических генераторов при статических и динамических режимах работы перспективны для различных практических приложений в качестве источников возобновляемой энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. ANSYS. Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench, Rel. 11.0. – SAS IP Inc., Canonsburg. – 2007.
2. Хорошун Л.Н., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – К., 1989. – 347 с.
3. Getman I., Lopatin S. Theoretical and experimental investigation of the porous PZT ceramics // *Ferroelectrics*. – 1996. – Vol. 186. – P. 301–304.
4. Nasedkin A., Rybjanets A., Kushkuley L., Eshel Y., Tasker R. Different approaches to finite element modelling of effective moduli of porous piezoceramics with 3-3 (3-0) connectivity // *Proc. 2005 IEEE Ultrason. Symp., Rotterdam, Sept. 18 -21, 2005.* – P. 1648-1651.