

ЕФЕКТИ ПОШИРЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У ТРИВИМІРНІЙ МАТРИЦІ З МНОЖИННИМИ ЖОРСТКИМИ ДИСКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

В. В. МИХАСЬКІВ, О. І. КАЛИНЯК

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
79060 Львів, вул. Наукова 3б
e-mail: orestkalynyak@gmail.com*

Вивчення поведінки матричних композитів за динамічних навантажень зводиться до задач присутності множинних включень у полі пружних хвиль. За поширення у таких структурах нестационарних хвиль на початковій часовій стадії можна обійтися розв'язками відповідних задач для поодинокого включення [1], однак після приходу дифрагованих хвиль від сусідніх включень необхідно враховувати ефекти взаємодії розсіювачів.

Розглянемо безмежну пружну матрицю з N копланарними абсолютно жорсткими дисковими включеннями по поверхнях S_n ($n = \overline{1, N}$), що знаходяться в одній площині $x_3 = 0$, падаюча на систему включень пружна хвиля містить лише компоненту переміщень u_3^{in} . Через інтегральне подання розв'язків з використанням формули Соміліано прийдемо до такої системи N ГІР типу хвильового потенціалу відносно функцій стрибків напружень $\Delta\sigma_3^{(n)}$ ($n = \overline{1, N}$) на включеннях, їх поступальних переміщень та поворотів:

$$\sum_{k=1}^N \iint_{S_k} \frac{\mathbf{B}^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} [\Delta\sigma_3^{(k)}(\mathbf{y}, t)]}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_{\mathbf{y}} = 4\pi G \left[-u_3^{in}(\mathbf{x}, t) + U_3^{(n)}(t) - \Omega_2^{(n)}(t)x_1 + \Omega_1^{(n)}(t)x_2 \right],$$

$$\mathbf{x} \in S_n, \quad n = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Тут $U_3^{(n)}$ і $\Omega_j^{(n)}$ ($j = \overline{1, 2}$) - компоненти векторів поступального переміщення та повороту n -го включення, відповідно, слабосингулярний інтегральний оператор $\mathbf{B}^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ такий же, як і у ГІР для поодинокого включення [1], та діє за законом часового запізнення.

ГІР (1) замикаються $3N$ диференціальними рівняннями руху включень як жорстких цілих, які мають вигляд ($r_j^{(n)}$, M_n - радіус інерції та маса n -го включення) [2]:

$$M_n \frac{d^2 U_3^{(n)}(t)}{dt^2} = - \iint_{S_n} \Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}}, \quad n = \overline{1, N},$$

$$M_n (r_j^{(n)})^2 \frac{d^2 \Omega_j^{(n)}(t)}{dt^2} = (-1)^j \iint_{S_n} y_{3-j} \Delta\sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}}, \quad j = 1, 2, \quad n = \overline{1, N}. \quad (2)$$

У виведених ГІР точно фіксується як момент настання взаємодії включень після приходу у актуальне включення дифрагованих поздовжніх хвиль від сусідніх включень (до цього у ГІР ядра впливу включень одне на одне дорівнюють нулеві) так і максимальне

запізнення у часовому аргументі шуканих функцій, необхідне поперечній хвилі для пробігу відстані між найбільш віддаленими точками на системі включень.

Полярну особливість у системі ГІР (1) виділяємо шляхом тотожного перетворення складників суми з номером $k = n$ із залученням інтегралів з ньютонівським (статичним) ядром:

$$A \iint_{S_n} \frac{\Delta \sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y + \iint_{S_n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ \mathbf{B}^{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} [\Delta \sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}, t)] - A \Delta \sigma_3^{(n)}(\mathbf{y}, t) \right\} dS_y +$$

$$+ \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{kn}) \iint_{S_k} \frac{\mathbf{B}^{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} [\Delta \sigma_3^{(k)}(\mathbf{y}, t)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y = 4\pi G \left[-u_3^m(\mathbf{x}, t) + U_3^{(n)}(t) - \right.$$

$$\left. - \Omega_2^{(n)}(t)x_1 + \Omega_1^{(n)}(t)x_2 \right], \quad \mathbf{x} \in S_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad A = (1 + \gamma^2) / 2. \quad (3)$$

Другий інтеграл у лівій частині рівнянь (3) регулярний, у чому легко переконатись, аналізуючи підінтегральну функцію для $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$. Тому у ньому інтегрувати з достатньою точністю можна по області S_n^0 , утвореній видаленням із S_n малого околу точки джерела \mathbf{x} . Інтеграли під знаком суми також регулярні через те, що у них точки інтегрування та джерела не збігаються через розташування на поверхнях різних включень. Щодо характеристичної частини рівнянь (3), то вона містить полярну особливість і відповідно до встановленої структури розв'язку рівнянь з такими ядрами регламентує подання шуканих функцій для кругових дискових включень з радіусами a_n ($n = \overline{1, N}$) у локальних системах координат у вигляді

$$\Delta \sigma_3^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \alpha_3^{(n)}(\mathbf{x}, t) / \sqrt{a_n^2 - x_1^2 - x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in S_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (4)$$

де $\alpha_3^{(n)}$ ($n = \overline{1, N}$) - нові невідомі обмежені функції.

Підставивши подання (4) у рівняння (3), отримаємо інтегральні рівняння з полярними особливостями у точці джерела \mathbf{x} і кореневими особливостями на контурах областей інтегрування S_k ($k = \overline{1, N}$). Тому перший етап регуляризації ГІР (3) передбачає інтерпретацію їх слабосингулярних інтегралів у сенсі

$$\iint_{S_n} \frac{\alpha_3^{(n)}(\mathbf{y}, t)}{\sqrt{a_n^2 - y_1^2 - y_2^2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y = \pi^2 \alpha_3^{(n)}(\mathbf{x}, t) +$$

$$+ \iint_{S_n} \frac{\alpha_3^{(n)}(\mathbf{y}, t) - \alpha_3^{(n)}(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{a_n^2 - y_1^2 - y_2^2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y, \quad \mathbf{x} \in S_n, \quad n = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Наступний регуляризаційний етап базується на заміні змінних:

$$\begin{cases} x_1 = a_n \sin \xi_1 \cos \xi_2; \\ x_2 = a_n \sin \xi_1 \sin \xi_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = a_n \sin \eta_1 \cos \eta_2; \\ y_2 = a_n \sin \eta_1 \sin \eta_2, \end{cases} \quad n = \overline{1, N}, \quad (6)$$

де $\xi(\xi_1, \xi_2)$, $\eta(\eta_1, \eta_2)$ - нові змінні. Заміною (6) кругова область S_n розташування n -го включення відображається на прямокутну область

$\tilde{S}_n : \{0 \leq \xi_1, \eta_1 \leq \pi/2; 0 \leq \xi_2, \eta_2 \leq 2\pi\}$, при цьому якобіаном перетворення усувається коренева особливість на контурі інтегрування по області \tilde{S}_n , коли $\eta_1 = \pi/2$.

Застосувавши перетворення (4), (6) у рівняннях (3), отримуємо їх регулярні аналоги. Разом з диференціальними рівняннями руху включення (2) вони формують замкнуту систему $4N$ рівнянь антисиметричної задачі відносно невідомих $\alpha_3^{(n)}$, $U_3^{(n)}$ і $\Omega_j^{(n)}$ ($j = \overline{1,2}, n = \overline{1,N}$), яка розв'язується числово методом колокацій у поєднанні з покроковим часовим алгоритмом з використанням кусково-постійної апроксимації невідомих за просторовими координатами та лінійної апроксимації за часом.

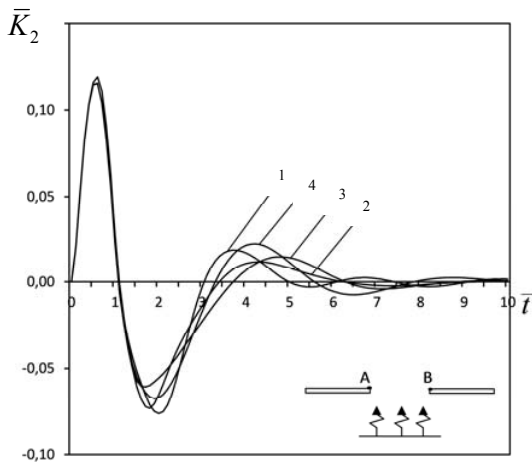
Окрім описаних вище параметрів, важливими характеристиками напружень в околі включень є коефіцієнти їх інтенсивності. Зокрема, коефіцієнт інтенсивності динамічних напружень (КІДН) поперечного зсуву $K_2^{(n)}$ для n -го включення зв'язаний із розв'язком ГР (3) у формі (4) формулою

$$K_2^{(n)}(\varphi^{(n)}, t) = -\frac{1}{4(1-\nu)\sqrt{a_n}} \alpha_3^{(n)}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\substack{x_1 = a_n \cos \varphi^{(n)} \\ x_2 = a_n \sin \varphi^{(n)}}}, \quad (7)$$

де $\varphi^{(n)}$ - кутова координата точки контуру n -го включення.

Як приклад, розглянуто задачу нестационарної взаємодії у пружній матриці двох кругових жорстких включень однакового радіуса $a_1 = a_2 = a$ та маси $M_1 = M_2 = 20\rho a^3$, розташованих на відстані d між центрами. Нестационарне збурення викликається плоскою поздовжньою пружною хвилею з перпендикулярним до включень напрямком падіння, однакою часом $t=0$ набігу на включення та таким розподілом у ній переміщень:

$$u_3^{in}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} U \frac{(c_1 t - x_3)^2 (c_1 t - x_3 - 2c_1 t_*)^2}{(c_1 t_*)^4}, & c_1 t - x_3 \leq c_1 t_*; \\ U, & c_1 t - x_3 > c_1 t_*, \end{cases} \quad (8)$$



де $t_* = 2a/c_2$ - час виходу хвилі на стаціонарний режим зі сталим переміщенням $U = const$. За збурення (8) обидва включення перебувають в однакових умовах, звідки природно випливає $U_3^{(1)} = U_3^{(2)}$, $\Omega_1^{(1)} = \Omega_1^{(2)} = 0$, $\Omega_2^{(1)} = -\Omega_2^{(2)}$, $K_2^{(1)}(\varphi^{(1)}, t) = K_2^{(2)}(\pi - \varphi^{(2)}, t)$.

На рисунку зображено залежності відносних КІДН поперечного зсуву в околі точок A і B контурів включень від безрозмірного часу для різних відстаней між взаємодіючими об'єктами: 1 - $d = 2,2a$; 2 - $d = 2,8a$; 3 - $d = 3,4a$; 4 - $d = \infty$ (поодинокі включення).

Закономірністю часової зміни КІДН для системи включень є їх осцилюючий характер із загасанням піків осциляцій та наближенням до тривіальних статичних значень

$\bar{K}_2 = 0$ з плином часу. На початковому часовому інтервалі, до приходу поздовжньої пружної хвилі від сусіднього включення, криві для поодинокого та системи розсіювачів збігаються, що узгоджується із умовами причинності. У подальшому пікові КІДН для взаємодіючих включень менші порівняно із випадком поодинокого включення, за виключенням першого від’ємного піку для більш віддалених включень. Зі зменшенням відстані між включеннями зростає часовий інтервал між піками КІДН.

Числовий аналіз демонструє демпфування нестационарних коливань компланарних дискових включень за падіння плоскої пружної поздовжньої хвилі внаслідок їх сусідства. Врахування нестационарної взаємодії близько розташованих включень приводить також до монотоннішого характеру історії та зменшення піків КІДН в околі включень. Отже, наповнення матриці більшою кількістю жорстких дискових включень можна добитись зменшення динамічної деформативності структури без втрати її міцнісних властивостей.

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф40.1/018)

ЛІТЕРАТУРА

1. *Mykhas'kiv V.V.* Transient response of a plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid // *Wave Motion*. – 2005. – **41**, No. 2. – P. 133-144.
2. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики (часть I). – М.: Высш. школа, 1984. – 343 с.