

КРЕСТОВИДНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ КАНАЛАХ

Т. С. КРАСНОПОЛЬСКАЯ, В.М.СПЕКТОР

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
ул. Желябова, 8/4, 03680, Киев-180, ГСП, Украина
тел. 456-97-05; e-mail: t.krasnopol'skaya@tue.nl, v.m.spektor@gmail.com*

Настоящая работа посвящена рассмотрению возможных волновых структур на свободной поверхности жидкости в прямоугольном бассейне, когда один его торец является волнопродуктором. Впервые в работе предлагается использовать (новый для задач возбуждения волн) аналитический метод суперпозиции Ляме, что дает ясную физически прозрачную картину перекачки энергии от волнопродуктора в крестовидные колебания свободной поверхности жидкости.

ВСТУПЛЕНИЕ

Погруженные в жидкость колеблющиеся тела создают вокруг себя на ее свободной поверхности волны различной природы. Некоторые из такого рода волн до сих пор не получили полного объяснения механизма своего возбуждения. Это, прежде всего, так называемые “крестовидные волны” (“cross waves”), которые впервые обнаружил и описал Фарадей в своей знаменитой работе [1]. Фарадей подробно описал следующий эксперимент: при погружении в жидкость вертикально одним концом деревянной дощечки и ее горизонтальных колебаниях по обе стороны дощечки, перпендикулярно к ней, возникали волны, как зубья горизонтально лежащей гребенки. Эти волны, образующие прямой угол в горизонтальной плоскости с направлением движения дощечки, получили название “крестовидные”. Помимо крестовидных волн колеблющиеся тела-волнопродукторы на поверхности жидкости возбуждают также обычные резонансные волны, распространяющиеся вдоль направления колебаний волнопродуктора. Эти волны возбуждаются при низких частотах и имеют амплитуды, меньшие по величине, чем крестовидные. Интерес представляет анализ перехода от одного класса волн к другому, классификация и условия резонансов.

1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В предположении, что жидкость является невязкой и несжимаемой, рассмотрим волны на ее поверхности в бассейне длины L , ширины b и глубины h (рис. (1)). Для теоретического рассмотрения задачи введем декартову систему координат с началом O на свободной невозмущенной поверхности жидкости. Волнопродуктор расположен в торце при $x = 0$. Перемещения волнопродуктора в направлении \vec{x} описываются функцией

$$u(z, t) = F(z) \sin(\omega t) = \left(a + \frac{a}{h} z \right) \sin(\omega t), \quad (1)$$

где $2a$ – размах колебаний волнопродуктора на поверхности жидкости; ω – круговая частота.

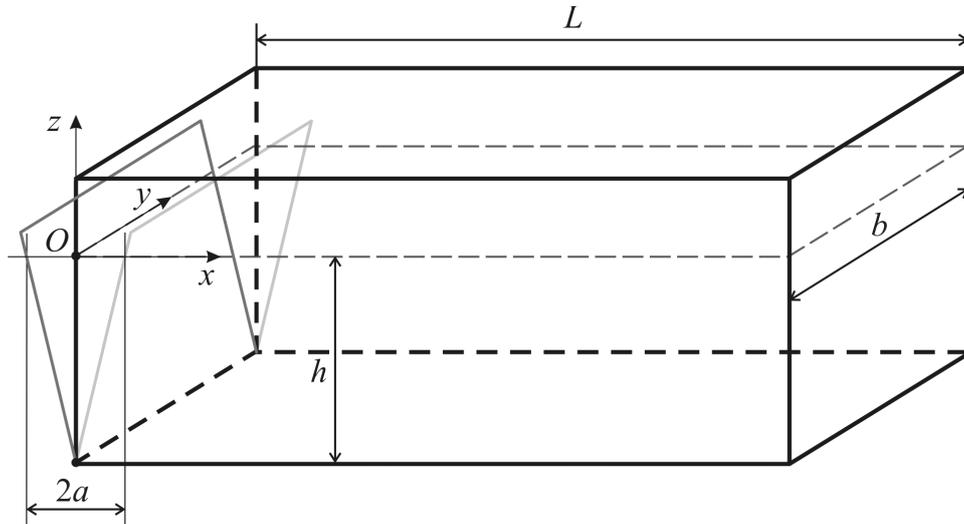


Рис. 1. Бассейн с волнопродуктором

При экспериментальных исследованиях частота волнопродуктора $f_e = \omega/(2\pi)$ изменялась в диапазоне $0 < f_e \leq 2.2$ Гц. При относительно низких частотах f_e возбуждаются лишь волны в направлении Ox , затем при повышении f_e – и в направлении Oy , т. е. крестовидные волны. Полагая жидкость идеальной, а ее движение – безвихревым, вводим для поля скоростей потенциал $\varphi(x, y, z, t)$, когда $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. Тогда для φ из условия неразрывности имеем уравнение

$$\nabla^2\varphi = 0 \text{ при } F(z) \cos(\omega t) \leq x \leq L, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq \xi(x, y, t), \quad (2)$$

где $\xi(x, y, t)$ – смещение свободной поверхности.

Динамическое и кинематическое условие на свободной поверхности имеют, соответственно, вид

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + g\xi = F_0(t) \text{ при } z = \xi(x, y, t); \quad (3)$$

$$\varphi_z = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\xi + \xi_t \text{ при } z = \xi(x, y, t), \quad (4)$$

где g – ускорение свободного падения; $F_0(t)$ – произвольная функция времени, нижние индексы x, y, z, t обозначают частные производные.

Кроме того, имеем следующие однородные граничные условия. Нормальная составляющая скорости жидкости обращается в нуль при жестких границах

$$\begin{cases} \varphi_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ \varphi_y = 0 & \text{при } y = 0; \quad y = b; \\ \varphi_x = 0 & \text{при } x = L; \end{cases} \quad (5)$$

Кинематическое условие на колеблющемся волнопродукторе имеет вид

$$\varphi_x = \omega F(z) \cos \omega t + F'(z) \varphi_z \sin \omega t \text{ при } x = F(z) \sin \omega t. \quad (6)$$

Экспериментальные наблюдения свидетельствуют о том, что сначала волнопродуктор создает вынужденные стоячие волны в направлении своего движения по оси $O\vec{x}$, а затем вблизи волнопродуктора появляются стоячие волны в направлении, перпендикулярном его движению, вдоль оси $O\vec{y}$, причем количество гребней волн меняется при увеличении скорости колебаний ω волнопродуктора. Таким образом, крестовидные волны имеют резонансный характер, каждая отдельная волновая структура имеет свою “собственную” частоту.

Полагая, что эти волновые структуры могут быть аппроксимированы такими динамическими характеристиками, как собственные формы, которые являются решениями линейных задач. Поэтому необходимо рассмотреть линейные краевые задачи, соответствующие нелинейной проблеме (2)–(6). Кроме того, полагаем, что размах колебаний волнопродуктора $2a$ мал по сравнению с характерным размером, т. е. можно ввести, скажем, малый параметр $\varepsilon_0 = a\omega^2/g$.

Рассмотрим решение следующей линейной краевой задачи

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_z = \xi_t & \text{при} \quad z = 0; \\ \varphi_z = 0 & \text{при} \quad z = -h; \\ \varphi_x = \tilde{F}_t(z, y, t) & \text{при} \quad x = 0; \\ \varphi_x = 0 & \text{при} \quad x = L; \\ \varphi_y = 0 & \text{при} \quad y = 0; \\ \varphi_y = 0 & \text{при} \quad y = b. \end{array} \right. \quad (8)$$

Решение линейной задачи (7)–(8) может быть найдено традиционно применяемым методом Гринберга. Мы же предлагаем использовать аналитический метод суперпозиции, так как он дает ясную физически прозрачную картину перекачки энергии от волнопродуктора в колебания свободной поверхности жидкости. Идею метода суперпозиции впервые выдвинул Ляме [2]. Следуя этому методу, потенциал φ может быть записан в виде суммы трех гармонических функций

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2. \quad (9)$$

Потенциал φ_0 является решением следующей граничной задачи

$$\nabla^2\varphi_0 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_0)_z = (\xi_0(t))_t & \text{при} \quad z = 0; \\ (\varphi_0)_z = 0 & \text{при} \quad z = -h; \\ (\varphi_0)_x = (\tilde{F}_0(t))_t & \text{при} \quad x = 0; \\ (\varphi_0)_x = 0 & \text{при} \quad x = L; \\ (\varphi_0)_y = 0 & \text{при} \quad y = 0; \\ (\varphi_0)_y = 0 & \text{при} \quad y = b, \end{array} \right. \quad (11)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0(t) = \frac{1}{bL} \int_0^b \int_0^L \xi(x, y, t) dx dy; \\ \tilde{F}_0(t) = \frac{1}{hb} \int_0^b \int_{-h}^0 \tilde{F}(z, y, t) dy dz; \\ \left(\text{если от } y \text{ не зависит, то} \right. \\ \left. \tilde{F}_0(t) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \tilde{F}(z, t) dz \right). \end{array} \right. \quad (12)$$

Если $F(z) = a + \frac{a}{h}z$, то

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(t) &= \frac{\sin \omega t}{h} \int_{-h}^0 \left(a + \frac{a}{h}z \right) dz = \\ &= \frac{\sin \omega t}{h} \left(az - \frac{a}{2h}z^2 \right) \Big|_{-h}^0 = \frac{\sin \omega t}{h} \left(ah - \frac{ah}{2} \right) = \frac{a \sin \omega t}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

$\xi_0(t)$, $\tilde{F}_0(t)$ описывают колебания среднего уровня свободной поверхности жидкости и усредненное по поверхности перемещение волнопродуктора. Эти величины связаны соотношением

$$(\xi_0)_t bL - \tilde{F}_{0t}(t) hb = 0, \quad (14)$$

выражающим закон сохранения массы для несжимаемой жидкости. Таким образом, для рассматриваемого случая движения волнопродуктора (1), (13)

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah \sin \omega t}{2L} = \left(\frac{ah}{2L} \right) \sin \omega t. \quad (15)$$

Потенциал φ_1 определяется из решения следующей линейной задачи

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t & \text{при } z = 0; \\ (\varphi_1)_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ (\varphi_1)_x = 0 & \text{при } x = 0; \\ (\varphi_1)_x = 0 & \text{при } x = L; \\ (\varphi_1)_y = 0 & \text{при } y = 0; \\ (\varphi_1)_y = 0 & \text{при } y = b, \end{array} \right. \quad (17)$$

При этом для φ_1 граничные условия (17) являются однородными в направлениях абсцисс и ординат, т. е. $O\vec{x}$ и $O\vec{y}$, а неоднородными (производная по z не равна нулю) в

направлении $O\vec{z}$. Поэтому φ_1 согласно теореме Стеклова о решении задачи Штурма-Лиувилля будет представляться в виде суммы по полным и ортогональным системам собственных функций по x и y , а по z функции не будут представлять собой полную систему.

Для потенциала φ_2 граничная задача формулируется следующим образом

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_2)_z = 0 & \text{при} \quad z = 0; \\ (\varphi_2)_z = 0 & \text{при} \quad z = -h; \\ (\varphi_2)_x = \left(\tilde{F} - \tilde{F}_0 \right)_t & \text{при} \quad x = 0; \\ (\varphi_2)_x = 0 & \text{при} \quad x = L; \\ (\varphi_2)_y = 0 & \text{при} \quad y = 0; \\ (\varphi_2)_y = 0 & \text{при} \quad y = b, \end{array} \right. \quad (19)$$

Поскольку φ_2 имеет однородные граничные условия по y и z , и неоднородные по x , то этот потенциал φ_2 может быть представлен в виде суммы по полным и ортогональным системам собственных функций по y и z . Следует отметить, что потенциал φ_2 не создает изменений скорости ξ на свободной поверхности при $z = 0$, он создает компоненту давления, как следует из динамического условия на свободной поверхности (3). Причем эта компонента имеет частоту колебаний волнопродуктора $\tilde{F}(t)$ в линейном приближении задачи.

Важно указать, что краевые задачи (10)–(11), (16)–(17) и (18)–(19) являются задачами Неймана, когда задана нормальная производная гармонической функции. Для получения решения без особенностей в угловых точках вторая теорема Грина требует, чтобы эти заданные значения удовлетворяли условию нулевого потока через границу. Это свойство удовлетворяется для всех трех граничных задач. Решение краевой задачи для φ_0 может быть найдено в виде

$$\varphi_0 = -\dot{\tilde{F}}_0(t) \frac{(x-L)^2}{2L} + \dot{\xi}_0 \frac{(z+h)^2}{2h} \quad (20)$$

(здесь точка означает производную по времени). При этом, учитывая условие (14), которое дает $\dot{\xi}_0 = \dot{\tilde{F}}_0 \frac{h}{L}$, уравнение Лапласа для

$$\varphi_0 = \frac{\dot{\tilde{F}}_0}{2L} \left\{ -(x-L)^2 + (z+h)^2 \right\} \quad (21)$$

удовлетворяется тождественно.

Решение линейной задачи (16)–(17) может быть записано в виде

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\text{ch}[k_{nm}(z+h)]}{\text{ch}(k_{nm}h)} \quad (22)$$

по полным системам функций $\cos \frac{n\pi x}{L}$ и $\cos \frac{m\pi y}{b}$ с неизвестными амплитудами $\varphi_{nm}(t)$, где

$$k_{nm} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}. \quad (23)$$

Система функций $\cos \frac{n\pi x}{L}$ и $\cos \frac{m\pi y}{b}$ является полной ортогональной системой, поэтому любая функция, зависящая от x и y может быть представлена как ряд Фурье по этим функциям. Поэтому функция перемещений (волн) свободной поверхности жидкости $\xi(x, y, t) - \xi_0(t)$ может быть представлена в виде

$$\xi(x, y, t) - \xi_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (24)$$

Граничное условие (17) вида $(\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t$ дает соотношение между амплитудами рядов (22) и (24)

$$\varphi_{nm} = \dot{\xi}_{nm} (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{-1}. \quad (25)$$

Потенциал скорости $\varphi_2(x, y, z, t)$ может быть записан в форме рядов Фурье по полным системам $\cos \frac{m\pi y}{b}$ и $\cos \frac{j\pi z}{h}$, так что общее решение имеет вид

$$\varphi_2 = \sum_m \sum_j \Phi_{mj}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} [\alpha_{mj}(x-L)]}{\operatorname{ch} (\alpha_{mj}L)}; \quad (26)$$

$$\alpha_{mj} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{j^2\pi^2}{h^2}}. \quad (27)$$

Используя граничное условие (19) при $x = 0$ вида $(\varphi_2)_x = (\tilde{F} - \tilde{F}_0)_t$, имеем

$$\dot{F}_{mj}(t) = \bar{\Phi}_{mj}(t) = \frac{\operatorname{ch} (\alpha_{mj}L)}{\alpha_{mj} \operatorname{sh} [\alpha_{mj}(-L)]} \frac{1}{hb} \int_0^b \int_{-h}^0 \left(\dot{\tilde{F}} - \dot{\tilde{F}}_0 \right) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} dy dz. \quad (28)$$

2 Крестовидные резонансные волны

Пусть частота колебаний волнопродуктора ω (1) в два раза больше, чем значение одной из собственных частот ω_{nm} колебаний свободной поверхности жидкости

$$\omega \approx 2\omega_{nm}. \quad (29)$$

В этом случае колебания свободной поверхности жидкости аппроксимируем собственной формой, имеющей частоту ω_{nm} , т. е.

$$\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} + \xi_{00}. \quad (30)$$

Отыскивать амплитуду резонансной формы, функцию $\xi_{nm}(t)$, будем в следующей форме

$$\xi_{nm}(t) = \varepsilon_1^{1/2} \lambda_1 \left[p_1(\tau_1) \cos \frac{\omega t}{2} + q_1(\tau_1) \sin \frac{\omega t}{2} \right], \quad (31)$$

где $\lambda_1 = k_{nm}^{-1} \text{th}(k_{nm}h)$; $\varepsilon_1 = \frac{a\omega_{nm}^2}{g}$ – новый малый параметр; τ_1 – безразмерное медленное

время $\tau_1 = \frac{1}{4} \varepsilon_1 \omega t$,

$$\omega_{nm} = (g k_{nm} \text{th} k_{nm} h)^{1/2}. \quad (32)$$

Гарретт [3] показал, что крестовидные волны возникают вследствие наличия колебаний среднего уровня жидкости, т. е. не будь колебаний среднего уровня – не будет крестовидных волн. Однако, при этом он утверждал, что для возбуждения крестовидных волн колебания среднего уровня могут быть недостаточны для существования таких волн. Крестовидные волны должны получать энергию непосредственно от колебания волнопродуктора, но доказать это математически он не сумел. Колебания среднего уровня жидкости $\xi_{00}(t)$ имеют вид (15), а именно

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah}{2L} \sin \omega t = \varepsilon_1 \frac{g}{2\omega_{nm}^2} \frac{h}{L} \sin \omega t. \quad (33)$$

Если длина бассейна $L \gg h$, то $\frac{h}{L} = O(\varepsilon_1)$ и тогда $\xi_{00}(t)$ есть величина $O(\varepsilon_1^2)$, т. е. пренебрежимо мала. Будем рассматривать именно такой случай, когда $\frac{h}{L} = 0.05$ (таковы параметры геометрии бассейна в ИГМ НАНУ). При этом, тем не менее, влияние потенциала φ_0

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{a\omega}{4L} \cos \omega t [-(L-x)^2 + (z+h)^2] = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm} L} [(z+h)^2 - (L-x)^2] = \\ &= \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm}} \left[\frac{1}{L}(z+h)^2 - \frac{1}{L}(L-x)^2 \right] \end{aligned} \quad (34)$$

будет учитываться при использовании нелинейных граничных условий (3), (5) и (6).

Если колебания свободной поверхности аппроксимируются функцией вида (30), тогда

$$\varphi_1 \approx \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\text{ch}[k_{nm}(z+h)]}{\text{ch}(k_{n,m}h)}. \quad (35)$$

Применяем нелинейное граничное условие (6) для потенциала $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$, используя разложение в окрестности $x = 0$ и, сохраняя члены $O(\varepsilon_1^{3/2})$, в результате получаем выражение для φ_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{0j} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\text{ch}\alpha_{0j}(x-L)}{\text{ch}\alpha_{0j}} + \\ &+ \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{mj} \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\text{ch}\alpha_{mj}(x-L)}{\text{ch}\alpha_{mj}}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\Phi}_{0j} = \frac{-4g}{\omega_{nm} \alpha_{0j} \text{th} \alpha_{0j} L} \int_{-h}^0 \frac{z}{h} \cos \frac{j\pi z}{h} dz;$$

$$\tilde{\Phi}_{ij}(t) = 0 \text{ при } i \neq 0 \text{ и } i \neq m;$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{mj} &= -\frac{g \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{\omega_{nm}^2 \alpha_{mj} \operatorname{th} \alpha_{mj} L (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)} \int_{-h}^0 \frac{z}{h} \cos \frac{j\pi z}{h} dz, \quad j \neq 0; \\ \tilde{\Phi}_{m0} &= \frac{-g \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h}{h} \right]}{\omega_{nm}^2 h \alpha_{m0} \operatorname{th} \alpha_{m0} L (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)}, \quad j = 0.\end{aligned}\quad (36)$$

Заметим, что члены разложения φ_2 , имеющие сомножитель $\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t$ имеют порядок $O(\varepsilon_1^{3/2})$. Для нахождения амплитуды крестовидных волн $\xi_{nm}(t)$ необходимо использовать динамическое граничное условие (3) и кинематическое (5). Для этого разложим эти условия в ряд Тейлора, зная, что φ_1 есть $O(\varepsilon_1^{1/2})$, φ_0 и $\varphi_2 - O(\varepsilon_1)$. При удержании членов порядка $O(\varepsilon_1^{3/2})$ получаем:

$$\varphi_{nm}(t) = \frac{\dot{\xi}_{nm}}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} - \varepsilon_1 \xi_{nm} D \cos \omega t, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned}D &= \frac{1}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} \left[\frac{g}{\omega_{nm} L} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h}\right)^2 \tilde{\Phi}_{0j} 2 \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L}\right) (x-L) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx \right].\end{aligned}$$

Слагаемое $\varepsilon_1 D \xi_{nm}(t) \cos \omega t$ выражает влияние потенциалов φ_0 и φ_2 на величину $\varphi_{nm}(t)$ – амплитуды φ_1 . Этот член будет приводить, как мы увидим дальше, к параметрическому резонансу, как члены с сомножителями $\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t$.

Разложим в ряд Тейлора динамическое условие (3), оставляя члены $O(\varepsilon_1^{3/2})$ и учитывая, что $\ddot{\xi}_{nm} \approx -\omega_{nm}^2 \xi_{nm} + O(\varepsilon_1)$, получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^2 \xi_{nm} + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ + \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t (\omega D_1 - k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D) - \\ - \varepsilon_1 \xi_{nm} \sin \omega t (\omega_{nm}^2 D_1 - k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \omega D) = 0.\end{aligned}\quad (38)$$

Итак, для определения амплитуды резонансных крестовидных волн получаем уравнения линейных колебаний с двумя коэффициентами, периодически изменяющимися во времени, т. е. уравнение типа Матье:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ + \varepsilon_1 D_2 \xi_{nm} \sin \omega t + \varepsilon_1 D_3 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0,\end{aligned}\quad (39)$$

где

$$\begin{aligned}D_2 &= k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \omega D - \omega_{nm}^2 D_1; \\ D_3 &= -k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D + 2 \omega_{nm} D_1.\end{aligned}$$

Заметим, что $D_1 < 0$, поскольку согласно (36) $\tilde{\Phi}_{mj} < 0$.

Главный резонанс уравнений вида (39) реализуется при $\omega \approx 2\omega_{nm}$ (29), поэтому мы и выбрали представление вида (31),

При этом мы предполагаем выполнение резонансного условия близости частот ω и $2\omega_{nm}$, т. е. пусть

$$\omega^2 - 4\omega_{nm} = \frac{\varepsilon_1}{2} \omega^2 \beta_1.$$

Кроме того, мы представим амплитуду ξ_{nm} в виде (31), (32).

Применяя метод усреднения Боголюбова-Митропольского, после усреднения по быстрому времени $\frac{\omega}{2}t$ окончательно записываем

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{d\tau_1} = -\beta_1 q_1 - \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) q_1 + \beta_3 p_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} = \beta_1 p_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) p_1 - \beta_3 q_1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{2} &= \frac{27}{32} k_{nm}^2 \lambda_1^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{4} k_{nm}^2 \lambda_1^2 = \frac{3}{8} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{15}{32} k_{nm}^2 \lambda_1^2; \\ \beta_3 &= \frac{2D_3}{\omega} - \frac{4D_4}{\omega^2} = D_1 + \frac{D(k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{1/2}}{g^{1/2}} = \\ &= \tilde{\Phi}_{m0} b_{m0n} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{mj} b_{mjn} + \\ &+ \frac{1}{(k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{1/2}} \left[\frac{2g^{1/2}}{\omega_{nm} L} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \tilde{\Phi}_{0j} \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j}(x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx + \right. \\ &\left. + \frac{g^{1/2}}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (x-L) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Добавим в уравнения члены учитывающие линейное демпфирование, учитывая силы вязкого демпфирования $\varepsilon_1 \delta \xi_{nm}(t)$ дополнительно к входящим в уравнения [4], тогда система приводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{d\tau_1} = -\alpha p_1 - \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right] q_1 + \beta_3 p_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} = -\alpha q_1 + \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right] p_1 - \beta_3 q_1. \end{cases} \quad (41)$$

где $\alpha = \delta/\omega_{nm}$ и δ - декремент затухания колебаний по рассматриваемой резонансной моде $\xi_{nm}(t)$.

Положение равновесия, отличное от $p_1 = q_1 = 0$ (другими словами резонансные колебания свободной поверхности жидкости с ненулевыми амплитудами $p_1, q_1 \neq 0$),

получаем из условий

$$\frac{dp_1}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{dq_1}{d\tau_1} = 0:$$

$$\begin{aligned} -\alpha(p_1^2 + q_1^2) + \beta_3(p_1^2 - q_1^2) &= 0; \\ 2 \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right] p_1 q_1 - 2\beta_3 p_1 q_1 &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} p_1^2 + q_1^2 &= \frac{2(\beta_3 - \beta_1)}{A_1}; \\ -\frac{2(\beta_3 - \beta_1)}{A_1}\alpha + \beta_3(p_1^2 - q_1^2) &= 0; \end{aligned} \quad (43)$$

В результате можно записать, что регулярные установившиеся крестовидные волны характеризуются соотношением

$$q_1^2 = p_1^2 - \frac{\alpha}{A_1} \frac{\beta_3 - \beta_1}{\beta_3}, \quad (44)$$

откуда окончательно получаем амплитуды крестовидных волн

$$p_1^2 = \chi(1 + \chi_1); \quad q_1^2 = \chi(1 - \chi_1), \quad (45)$$

где

$$\chi = \frac{\beta_3 - \beta_1}{A_1}; \quad \chi_1 = \frac{\alpha}{2\beta_3}.$$

Амплитуды крестовидных волн имеют ненулевые значения, потому что есть энергетическая их подпитка при колебаниях волнопродуктора, в следствие чего $\beta_3 \neq 0$.

ВЫВОДЫ

Разработана методика решения проблемы возбуждения крестовидных волн на основе применения метода суперпозиции Ляме. Впервые получено решение, которое описывает процесс непосредственной перекачки энергии волнопродуктором в крестовидные волны на свободной поверхности прямоугольного конечномерного бассейна (в отличие от существующего решения [4] для полубесконечного прямоугольного канала).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // *Phil. Trans. R. Soc. London.*– 1831.– **A121**.– P. 299-340.
2. *Lamé G.* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.– Paris: Bachelier, 1852.– 335 p.
3. *Garrett C. J. R.* Cross waves // *J. Fluid Mech.*– 1970.– **41**.– P. 837-849.
4. *Miles J. W., Henderson D.* Parametrically forced surface waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.*– 1990.– **22**.– P. 143-165.