

ПРУЖИННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТОВ С НЕСОВЕРШЕННЫМИ ИНТЕРФЕЙСАМИ

М. В. ГОЛУБ^{1,*}, А. БОСТРЁМ², В. В. МИХАСЬКИВ³

¹*Институт математики, механики и информатики
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*

²*Chalmers University of Technology, Гётеборг, Швеция*

³*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАНУ, г. Львов, Украина
e-mail *: m_golub@inbox.ru*

Изучается возможность применения пружинных граничных условий для описания распространения упругих волн в слоистых композитах с несовершенными интерфейсами, например, при неидеальном контакте компонент или при наличии групп микродефектов на интерфейсе. Имперфектная зона моделируется с помощью пружинных граничных условий, связывающих перемещения и напряжения по разные стороны рассматриваемого интерфейса. Жесткости в пружинных граничных условиях определяются концентрацией дефектов, их характерным размером и упругими свойствами материалов. При выводе значений эффективных параметров (жесткостей) применяются подходы Баика-Томпсона и Бострёма-Викхема, а также техника интегральных преобразований. На примере трещин в антиплоском, плоском и трехмерном случае выводятся соотношения для пружинной жесткости. На нескольких примерах обсуждается эффективность полученной модели.

ВВЕДЕНИЕ

Предвестником разрушения образца из композитного или однородного материала обычно является образование микротрещин, их последующий рост до макротрещин делает его дальнейшую эксплуатацию невозможной или опасной. Появление новых композитных материалов лишь повышает актуальность задач обнаружения внутренних неоднородностей и восстановления их параметров [1]. Отдельный интерес представляет динамическое поведение отслоения или зоны нарушения сплошности.

Зачастую для описания трещины используется математическая модель со свободными от напряжений берегами, однако в ряде случаев, когда речь идет о зоне неидеального контакта или концентрации микродефектов, то есть области с чередующимися зонами непрерывности и разрывности в перемещениях, этого недостаточно. Математически описать динамическое поведение трещиноватой среды или зоны, содержащей внутренние дефекты, можно введением распределения микротрещин (полостей) [2, 3] или, наоборот, пятен контакта между не соприкасающимися слоями [3, 4]. Получили развитие и другие подходы к моделированию поврежденных материалов: замена поврежденной зоны тонким вязко-упругим слоем, в том числе в комбинации с рассматриваемым в работе введением пружинных граничных условий (ПГУ) [5, 6]. В любом

случае для описания поведения упругой среды с отслоением необходима информация о поврежденности: количество, ориентация, размеры микротрещин и т.п.

Использование ПГУ видится весьма эффективным инструментом при моделировании поврежденных интерфейсов и шероховатых контактирующих поверхностей [6]. Во-первых, ПГУ являются более общими граничными условиями нежели условия на одиночной трещине и позволяют описывать более широкий класс отслоений. Во-вторых, при моделировании отслоений решение зачастую проще построить для ПГУ нежели для множественных трещин. В-третьих, при решении задач об идентификации дефектов ПГУ могут дать дополнительное знание о размерах и степени поврежденности. Для получения этих знаний нужна связь между константами в ПГУ и параметрами отслоения, а определение этой связи является основной целью настоящего исследования.

1 НЕИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ

Для описания динамического поведения поврежденных зон часто используется распределенный набор трещин. Здесь необходимо отметить ряд работ Ахенбаха с соавторами, где было рассмотрено прохождение плоских волн в пространстве и рассеяние на разных вариантах распределения трещин, а также книгу [3], включающую обзор методов. В частности, на примере коэффициента отражения было произведено сравнение с результатами, вытекающими из приближенных теорий. В целом, исследования, выполненные в 80-х годах группой Ахенбаха, указывают на достаточно небольшое различие в волновых полях в дальней зоне при одинаковой поврежденности интерфейса.

Ниже рассматривается модель, которая предполагает замену распределенного набора интерфейсных трещин ПГУ, заданными на поверхности, содержащей или аппроксимирующей этот набор. Переход выполняется из предположения об эквивалентности амплитуд, даваемых пружинной и трещиноватой моделью в дальней от отслоения зоне. В квазистатическом приближении Баик и Томпсон [5] ввели ПГУ для описания колебаний неограниченной поврежденной плоскости между пространствами. ПГУ были также выведены Бострёмом и Викхемом из решения задачи о колебаниях частично закрытой трещины в [4], их эффективность была показана в ряде работ по моделированию неполного контакта между поверхностями одинаковых материалов (например, [6, 7]), в том числе экспериментально в [8]. В общем трехмерном случае ПГУ в точке \mathbf{x} поверхности S с нормалью \mathbf{n} :

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \kappa (\mathbf{u}_{\mathbf{n}-}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{\mathbf{n}+}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S$$

κ – матрица жесткостей 3×3 , \mathbf{n}_{\pm} – внешняя и внутренняя нормали к поверхности в рассматриваемой точке \mathbf{x} , $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}$ – нормальные и касательные компоненты тензора напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} в \mathbf{x} , а \mathbf{u} – вектор перемещений. В изотропном случае можно выбрать локальную систему координат в \mathbf{x} таким образом, что остаются ненулевыми три диагональные компоненты матрицы жесткости. Далее выводятся выражения для жесткостей κ_i через трещиноватость и упругие свойства материалов.

2 ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ: АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим сначала прохождение плоской упругой SH-волны из одного полупространства в другое, с расположенной на их стыке интерфейсной полосовой трещиной.

Упругие константы Ламе λ^j, μ^j ($c_1^j = \lambda^j + \mu^j, c_2^j = c_3^j = \mu^j$), плотности материалов ρ^j и волновые поля отмечаются верхним индексом $j = 1$ для верхнего полупространства, и $j = 2$ для нижнего. Гармонические установившиеся колебания в каждом из изотропных полупространств определяются уравнениями движения, записанными относительно перемещений u_y^j ; волновые числа соответственно k_y^j . Для определенности плоская волна предполагается падающей из нижнего полупространства $z < 0$ под углом θ , при этом она частично отражается интерфейсом (угол θ_1) и трещиной полуширины l .

Неизвестный скачок смещений на берегах трещины $v_y(x)$ раскладывается в ряд по полиномам Чебышева 2-го рода ψ_n . Подстановка разложения в интегральное уравнение и последующее проектирование на ψ_n , приводит к бесконечной алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов разложения $v_y(x)$. При предположении об относительной малости $k_4^1 l$ можно получить асимптотическое решение или после применения обратного преобразования Фурье [9]

$$v_y^0(x) = 2K\sqrt{l^2 - x^2}, \quad K = i \frac{(\mu^1 + \mu^2) \cos \theta \cos \theta_1}{\mu^1 k_4^1 \cos \theta + \mu^2 k_4^2 \cos \theta_1} k_4^2 k_4^1 \quad (1)$$

В качестве следующего шага рассматривается задача, где вместо одной трещины ширины располагается бесконечный набор интерфейсных трещин шириной $2l$. Предполагается, что дефекты распределены случайным образом, а взаимодействием между трещинами можно пренебречь. Вместо точного решения, которое, вообще говоря, не представляет большого интереса, вычисляется среднее по ансамблю значение рассеянного поля, определяемое вдали от границы полупространств. Амплитуды рассеянного поля могут быть выражены через $C = N_c l / x_0$ – отношение суммарной длины N_c трещин на интервале $[-x_0, x_0]$ к длине рассматриваемой области (трещиноватость) и среднего скачка смещений $\bar{v}_y = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l v_y(x) dx$.

Заключительный этап состоит в выводе зависимости между жесткостью в ПГУ и параметрами поврежденного интерфейса. Нетрудно определить коэффициент прохождения плоской волны через два полупространства, сцепление между которыми задается ПГУ с неизвестной жесткостью определяется. Жесткость определяется из предположения о равенстве коэффициентов прохождения для распределенной пружины и распределения трещин. Используя (1), выводится значение жесткости распределенной пружины, которое с применением асимптотики для функций Бесселя $J_n(\alpha) \approx 2^{-n} \alpha^n / n!$ при малых α имеет вид:

$$\kappa_y = \frac{4}{C\pi l} \cdot \frac{\mu^1 \mu^2}{\mu^1 + \mu^2}. \quad (2)$$

Выражение для жесткости (2) в ПГУ совпадает со значением, полученным в [9] для нормального угла падения. Так как κ_y фактически не зависит от угла падения, то следовательно ПГУ могут быть применены для описания отслоений разных размеров в волноводах любого типа. Необходимо также отметить, что для одинаковых материалов значение жесткости (2) близко к значению, полученному на низких частотах Ахенбахом и Ли в [10] из энергетических соображений.

3 ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ: ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

Определение компонент κ_z и κ_x матрицы жесткости можно произвести аналогично антиплоскому. При падении упругой плоской P- или SV-волны под произволь-

ным углом в каждом из полупространств возбуждается два типа волн, что затрудняет вывод значений для κ_z и κ_x . Поэтому рассматривается только нормальный угол падения, при котором не появляются дополнительных типов волн. В плоском случае также применим метод Галеркина с разложением по полиномам Чебышева 2-го рода. Из предположения о малости $k_s^1 l$ с применением интегрального подхода [2] также может быть получено асимптотическое решение плоской задачи для падающей P- и SV- волны соответственно [11]. Использование низкочастотных асимптотик [11] позволяет получить комплекснозначное выражение для κ_x , что будет приводить к потерям энергии в системе. Однако при малых значениях $k_s^1 l$ вещественная часть преобладает и, соответственно, константы для ПГУ вне зависимости от типа волны совпадают

$$\kappa_x = \kappa_z = \frac{8}{C\pi l\beta_1}, \quad \beta_1 = \frac{c_1^1}{(\lambda^1 + \mu^1)\mu^1} + \frac{c_1^2}{(\lambda^2 + \mu^2)\mu^2}. \quad (3)$$

4 ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В трехмерном случае плотность распределения трещин задается уже как отношение поврежденной (отслоившейся) площади S_{crack} или суммарной площади трещин к общей рассматриваемой площади S_{total} : $C = S_{crack}/S_{total}$. При относительно малых размерах трещин или низких частотах может быть построено асимптотическое решение дающее простой вид для жесткостей, однако ниже приводится общая схема. Взаимодействием трещин можно пренебречь так как в реальных ситуациях определить точное положение всех трещин слишком трудоемкая задача. Вместо этого используется техника усреднения по ансамблю. В дальней от интерфейса зоне рассеянное поле представляется в виде плоских волн распространяющихся в направлении от интерфейса. Как в двумерной постановке возможно применить теорему Бетти-Рэлея для двух состояний упругой среды без трещины и в ее присутствии. В таком случае интегралы ненулевой вклад дают лишь два члена (аналогично антиплоскому и плоскому случаю).

Как и ранее путем приравнивания коэффициентов прохождения для распределения трещин и для ПГУ определяются жесткости квадратной диагональной матрицы κ . Из рассмотрения падающей под прямым углом к интерфейсу P-волн (см. предыдущие разделы) может быть определена константа κ_3 , а затем аналогично для S-волн с углом поляризации $\theta = \{0^\circ, 90^\circ\}$ тангенциальные компоненты $\kappa_1 = \kappa_2$. Таким образом, можно получить значения для κ_s

$$\kappa_s = \frac{2i}{C \mathbf{p}^s \cdot \bar{\mathbf{v}}^s} \cdot \frac{c_s^1 k_s^1 c_s^2 k_s^2}{c_s^1 k_s^1 + c_s^2 k_s^2}. \quad (4)$$

5 ПРИМЕНЕНИЕ ПОДХОДА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Предлагаемый подход позволяет оценивать изменение дисперсионных свойств поврежденного многослойных композитов. В качестве примера на Рисунке 1 приведены безразмерные фазовые скорости $v_{ph} = kd_2/\omega$ при различных $\gamma(\rho^1)^2 = c_{44}^1 d_2 \kappa$ в зависимости от частоты $\omega d_2 \sqrt{\rho/c_{44}}$ для двухслойной пластины с толщинами слоев d_i и упругими модулями: $c_{ij}^2 = 2c_{ij}^1$. Значение $\gamma = \infty$ соответствует идеальному контакту и,

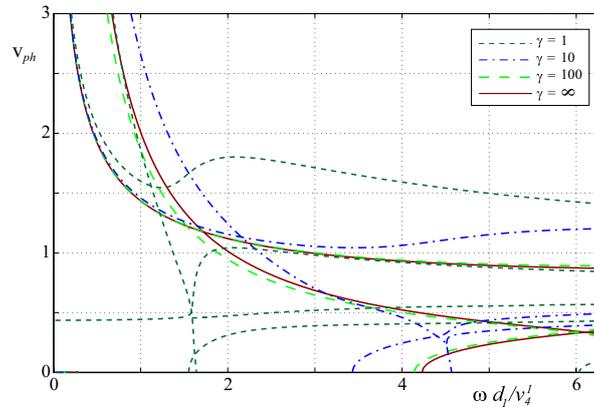


Рис. 1. Фазовые скорости первых бегущих мод для двухслойной поврежденной пластины (γ), составленной из различных материалов ($c_2^2 = 2c_1^1$).

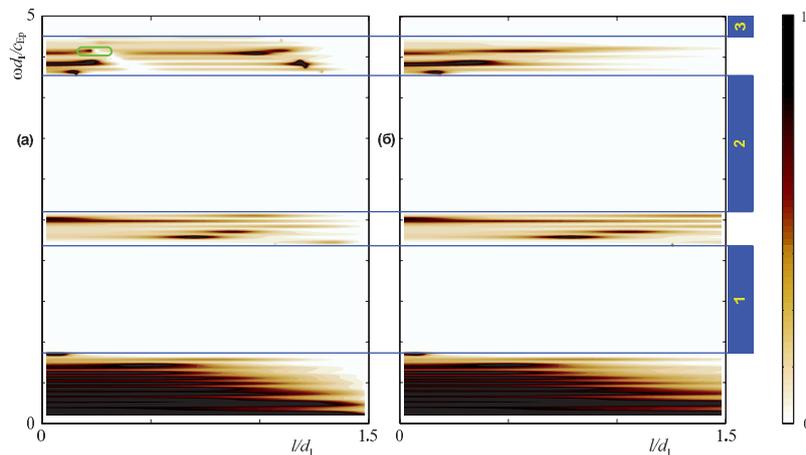


Рис. 2. Энергетический коэффициент прохождения $\kappa^+(\omega, l/d_1)$ для периодического набора интерфейсных трещин (а) и при использовании пружинных граничных условий (б); $C = 1/3$.

наоборот, $\gamma = 0$ соответствует случаю двух свободных от напряжений слоев при полном отсутствии контакта между ними.

В [12] было продемонстрировано, что положение повреждения в многослойной структуре влияет на амплитуды колебаний весьма существенным образом и приводит к резонансным колебаниям. В приведенном примере рассмотрен пакет из периодически расположенных 32 слоев двух типов, поврежденный слой имеет порядковый номер $M = 15$, угол падения $\theta = 0^\circ$. Энергетические коэффициенты прохождения $\kappa^+(\omega, l/d_1)$ для пакета с поврежденным слоем приведены на Рисунке 2. Повреждение, моделируется как периодический набор трещин, что является достаточно специальным случаем (Рисунок 2а) и с усредняющим подходом, то есть ПГУ. При этом жесткость для граничных условий определена для той же степени поврежденности.

Можно видеть, что пружинная модель, основанная на технике усреднения, даже для достаточно высоких частот дает хорошие результаты, в том числе и в предска-

нии резонансных явлений (см. Рисунок 2). Подход может быть развит в случае включений [5], а также для анизотропных сред, в этом случае матрица жесткостей будет иметь ненулевые внедиагональные элементы, а также может быть учтено влияние расположения трещин вдоль осей координат, т.е. плотности распределения по направлениям.

Работа выполнена в рамках совместного проекта РФФИ-ГФФИУ (№ 11-01-90400-Ф40.1/018) и проекта ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" Минобрнауки № 14.740.11.0578.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобровницкий Ю. И., Коротков М. П., Кочкин А. А., Томиллина Т. М. Постановка и решение задачи восстановления волнового поля в упругой конструкции // Доклады академии наук.– 1998.– **359**, N 2.– С. 190-193.
2. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред.– М: Наука, 1989.– 344 с.
3. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks.– Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998.– 250 с.
4. Boström A., Wickham G. R. On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks // Journal of Nondestructive Evaluation.– 1991.– **10**.– С. 139-149.
5. Baik J. M., Thompson R. B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model // Journal of Nondestructive Evaluation.– 1984.– **4**.– С. 177-196.
6. Rokhlin S. I., Huang W. Ultrasonic wave interaction with a thin anisotropic layer between two anisotropic solids: I Exact and asymptotic-boundary-condition methods // Journal of the Acoustical Society of America.– 1992.– **92**, N 3.– С. 1729-1742.
7. Ueda S., Biwa S. et al. On the stiffness of spring model for closed crack // International Journal of Engineering Science.– 2006.– **44**.– С. 874-888.
8. Margetan F. J. Interfacial spring model for ultrasonic interaction with imperfect interfaces: Theory of oblique incidence and application to diffusion bonded butt joints // Journal of Nondestructive Evaluation.– 1988.– **7**.– С. 131-151.
9. Boström A., Golub M. V. Elastic SH-wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics.– 2009.– **62**.– С. 39-52.
10. Achenbach J. D., Li Z. L. Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens // Wave Motion.– 1986.– **8**.– С. 225-234.
11. Golub M. V., Boström A. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves // Wave Motion.– 2011.– **48**, N 2.– С. 105-115.
12. Golub, M. V., Zhang C., Wang Y.-S. SH-wave propagation and resonance phenomena in a periodically layered composite structure with a crack // Journal of Sound and Vibration.– 2011.– **333**, N 13.– С. 3141-3154.