

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА РАЗГРУЗКИ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В. Р. БОГДАНОВ¹, Г. Т. СУЛЫМ²

¹Национальный транспортный университет, Киев

²Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов

Решается задача плоского напряженного состояния для материала с поперечным сечением в форме прямоугольника с пропилом-трещиной посередине (компактного профиля) для определения вязкости разрушения при трехточечном изгибе в динамической упругопластической постановке с учетом процесса разгрузки материала

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1-8] было предложено для анализа процессов разрушения применить вместе с экспериментальными также и расчетные методы с использованием динамичной упругопластической модели материала. В публикации [5] решена задача плоского деформированного состояния. Пространственное напряженно-деформированное состояние материала определяется в работе [2]. В публикации [3] решена задача плоского напряженного состояния с трещиной, что увеличивается по условию отсутствия максимальных напряжений на острие трещины. В публикациях [4] и [6] решаются плоские задачи соответственно напряженного и деформированного состояния с трещиной, что увеличивается по локальному критерию хрупкого разрушения. В публикациях [1], [7] и [8] вязкость разрушения определяется соответственно на основе решения плоского напряженного состояния, плоского деформированного состояния и пространственной задач в предположении, что трещина неподвижна. Предложенные модели дали возможность значительно повысить уровень адекватности полученных теоретических подходов. В публикации [9] определяется напряженно-деформированное состояние жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием при динамическом нагружении.

В данном исследовании в отличие от [1] учитывается процесс разгрузки материала.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим деформирование бесконечного изотропного бруса $\{|x| \leq L/2; 0 \leq y \leq B; |z| < \infty\}$, имеющего в плоскости поперечного сечения форму прямоугольника с пропилом-трещиной посередине. Предполагаем, что напряженно-деформированное состояние в каждом поперечном сечении бруса одинаковое и близкое к плоскому напряженному состоянию ($\sigma_{zz} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$) и в этом случае достаточно рассмотреть сечение в форме прямоугольника $\Sigma = L \times B$ (рис. 1, длина L , ширина B) с пропилом-трещиной длиной l вдоль отрезка $\{x = 0; 0 \leq y \leq l\}$. Брус контактирует с двумя неподвижными опорами вдоль отрезков $\{L_* \leq x \leq L_* + a; y = 0\}$. Сверху на тело падает абсолютно твердый ударник, который контактирует вдоль отрезка $\{|x| \leq A; y = B\}$. Его

действие заменяем равномерно распределенной в области контакта нормальной нагрузкой $-P$, что изменяется со временем как линейная функция ($P = p_{01} + p_{02}t$). Вследствие симметрии процесса деформирования относительно линии $x=0$ далее рассматривается только правая часть поперечного сечения (рис. 1). На протяжении всего промежутка времени взаимодействия область контакта остается постоянной. При расчетах динамических полей напряжений и деформаций не учитываем взаимодействия волновых полей, отражения от границ тела и возможного при этом контактного взаимодействия между берегами разреза.

Пусть $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ – вектор смещений, связанный с компонентами тензора деформаций ε_{ij} соотношениями Коши.

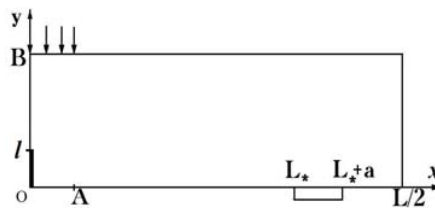


Рис.1. Расчетная схема

Граничные условия представим в виде:

$$\begin{aligned}
 x=0, \quad 0 < y < l, \quad & \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \\
 x=0, \quad l < y < B, \quad & u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \\
 x=L/2, \quad 0 < y < B, \quad & \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \\
 y=0, \quad 0 < x < L_*, \quad & \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \\
 y=0, \quad L_* < x < L_* + a, \quad & u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \\
 y=0, \quad L_* + a < x < L/2, \quad & \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \\
 y=B, \quad 0 < x < A, \quad & \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0, \\
 y=B, \quad A < x < L/2, \quad & \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0;
 \end{aligned} \tag{1}$$

Начальные условия запишем в таком виде

$$u_x|_{t=0} = 0, \quad u_y|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_x|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_y|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

где t – время, точка над символом означает производную по времени.

Соотношения динамики в напряжениях имеют вид (ρ – плотность материала):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \tag{3}$$

В качестве физической модели принята модель, основанная на теории неизотермического пластического течения для среды с упрочнением и условием текучести Мизеса в сочетании с гипотезой кратковременной ползучести [10].

Уравнения связи между напряжениями и деформациями в соответствии с этой моделью имеют вид [11]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \phi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda; \tag{4}$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – девиатор тензора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль сдвига; $K = 3K_1$, $K_1 = (1 - 2\nu) / (3E)$ – модуль объемного сжатия, связывающий объемное расширение 3ε , среднее напряжение $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) / 3$ и ϕ – температурное удлинение в соотношении $\varepsilon = K\sigma + \phi$ (в данном случае $\phi \equiv 0$); ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости Юнга; $d\lambda$ – некоторая скалярная функция, определяемая формой поверхности нагружения. Предполагаем, что эта скалярная функция является квадратичной функцией девиатора напряжений s_{ij} [10].

Предполагаем, что в результате пластической деформации происходит упрочнение материала по следующей зависимости от температуры [12]:

$$\sigma_s(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon_0} \right)^{\eta^*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}; \quad (5)$$

где T – температура, $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$ – параметр Одквиста, $T_0 = 20^\circ C$, η^* – коэффициент упрочнения, $\sigma_s(T)$ – предел текучести после упрочнения материала при температуре T .

В данном случае нестационарное взаимодействие происходит в течение короткого промежутка времени. Представив (4) в развернутой форме, имеем формулы

$$d\varepsilon_{xx} = d \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{xx} - \sigma)d\lambda, \quad d\varepsilon_{xy} = d \left(\frac{\sigma_{xy}}{2G} \right) + \sigma_{xy}d\lambda, \quad (6)$$

$$d\varepsilon_{yy} = d \left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{yy} - \sigma)d\lambda, \quad d\varepsilon_{zz} = d \left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{zz} - \sigma)d\lambda;$$

$$\text{где } d\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } f = \sigma_i^2 - \sigma_s^2(T) < 0, \\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, & \text{если } f = 0, \quad df = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx})^2 + (\sigma_{yy})^2 + 6\sigma_{xy}^2}$$

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Пусть нестационарное взаимодействие происходит на промежутке времени $[0, t_*]$. Как и в [1, 3, 4] для численного интегрирования по времени использовалась квадратурная формула Грегори с равноотстоящими узлами порядка $m_1 = 3$ с коэффициентами D_n [13], с равномерной дискретизацией по времени с узлами $t_k = k\Delta t \in [0, t_*]$ ($k = \overline{0, K}$) и проводя такие же самые выкладки, как и в [1, 3, 4], получим выражения для напряжений и приращений деформаций.

Для учета пластических деформаций применяем метод последовательных приближений, который позволяет решение упругопластической задачи свести к решению ряда линейных задач [1, 3, 4].

$$\psi^{(n+1)} = \begin{cases} \psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G} (Q_i < -Q); & \psi^{(n)} (|Q_i| < Q); \\ \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_s(T)} (Q_i > Q) \end{cases}; \quad Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T); \quad \psi = 1/(2G) + \Delta\lambda. \quad (8)$$

(Q —величина наибольшего отклонения интенсивности напряжений от предела текучести, $0 \leq p \leq 1$).

Независимым параметром, который характеризует процесс нагружения, есть время $t_k = k\Delta t$. Поскольку в механике разрушения вязкость разрушения (трещиностойкость) в большинстве случаев получают в квазистатических экспериментах и сопоставляют ее с предельным значением коэффициента интенсивности напряжений (КИН) K_1^e , полученным из упругого решения, то для описания изменения отдельных характеристик во многих случаях в роли независимого параметра (переменной) выберем приближенное значение КИН K_1^e (ниже будем называть его упругим КИН) для многих зависимостей для упругой задачи трехточечного изгиба балки с трещиной [14]:

$$K_1^e = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left(1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \right); \quad (9)$$

где $F = 2AP$ – контактная сила, $4B$ – длина между опорами.

Процесс разгрузки материала происходил по такому алгоритму. Если в какой-нибудь ячейке абсолютное значение напряжения стало меньше, чем максимальное значение, тогда пластические деформации прекращали увеличиваться и материал прекращал упрочняться. Снова пластические деформации начинали увеличиваться и упрочнение материала продолжалось, когда абсолютное значение напряжений превышало максимальное значение.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

Для расчетов была выбрана реакторная сталь 15X2НМФА. Применялся метод конечных разностей при переменном шаге разбиения вдоль осей Ox (N элементов) и Oy (M элементов). Шаг между точками разбиения был наименьшим в области вершины трещины и на границах расчетной области. Характерный размер ячеек в радиусе 1-2 мм от вершины трещины равен среднему размеру зерна металла (0,05 мм). Разбиение по времени равномерное. Использование метода конечных разностей обосновывается в [15], причем обеспечивается точность расчетов с погрешностью не больше чем $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$.

На рис. 2, 3 приведены результаты расчетов для поперечных сечений длиной $L=60$ мм, шириной $B=10$ мм и глубиной пропила в центре образца $l=3$ мм, с коэффициентом упрочнения $\eta^* = 0,05$. Расстояние между опорными точками составляло 40 мм. Шаг по времени $\Delta t = 0,0005$ с. Половина длины зоны контакта была $A=2,5$ мм. $M=60$, $N=77$, наименьший шаг разбиения был равен 0,02 мм, а наибольший 2,6 мм ($\Delta x_{\min} = 0,02$ мм; $\Delta y_{\min} = 0,04$ мм (только первый слой), коэффициенты $p_{01} = 8$ МПа, $p_{02} = 10$ МПа, температура $T=50^\circ$.

Результаты расчетов средних напряжений в узлах вблизи вершины трещины на стадии, когда пластические деформации еще отсутствуют, сопоставлялись с результатами

рассчитанными для центра ячеек области вершины трещины на основе классических одночленных асимптотических зависимостей [14, п. 1.2] с использованием формулы (9). При этом процентное отклонение значений в напряжениях не превышало 0,3%.

На рис. 2 приведены графики напряжений (МПа), возникающих в области вершины трещины двумерного компактного образца: сплошная, сплошная с треугольником, сплошная с крестиком и сплошная с кружочком линии соответствуют напряжениям σ_{xx} , σ_{yy} , напряжению текучести σ_s и интенсивности напряжений σ_i .

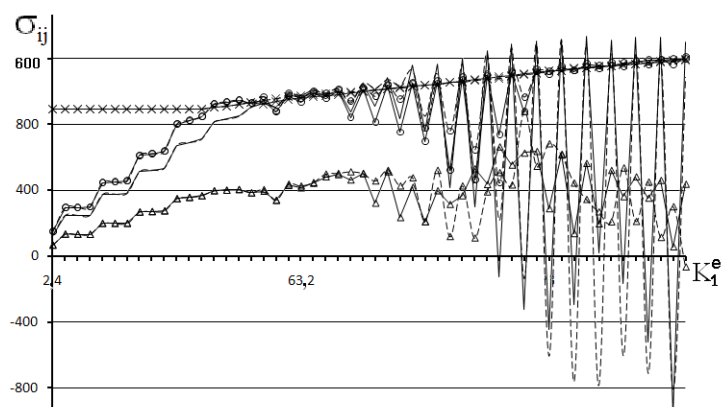


Рис.2. Напряжения, возникающие в окрестности вершины трещины

Полученные напряжения сравниваются с напряжениями, полученными при решении задачи плоского напряженного состояния без учета процесса разгрузки материала: пунктирная, пунктирная с треугольником, пунктирная с крестиком и пунктирная с кружочком линии соответствуют напряжениям σ_{xx} , σ_{yy} , напряжению текучести σ_s и интенсивности напряжений σ_i . На рис. 3 значения параметра Одквиста рассматриваемой задачи сравниваются со значениями соответствующей задачи плоского напряженного состояния без учета процесса разгрузки материала.

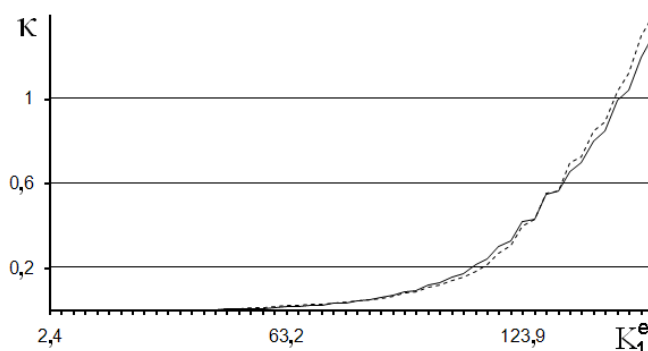


Рис.3. Параметр Одквиста в окрестности вершины трещины

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи плоского напряженного состояния для материала с поперечным сечением в форме прямоугольника с пропилом-трещиной посередине (компактного

профіля) для определения вязкости разрушения при трехточечном изгибе в динамической упругопластической постановке с учетом процесса разгрузки материала дает возможность намного точнее определять поля пластических деформаций и напряжений, чем при решении квазистатической упругопластической задачи плоского напряженного состояния [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов В. Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану. // Вісник Київського національного Університету. Сер. "Фізико-математичні науки" – 2008. – Вип. 3. – С. 51-56.
2. Богданов В. Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини. // Вісник Київського національного Університету. Сер. "Фізико-математичні науки" – 2009. – Вип. 2. – С. 51-56.
3. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського нац. університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
4. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204.
5. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении // Теоретическая и прикладная механика, Донецьк. – 2010. – № 47. – С. 59–66.
6. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделирование подростания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // Збірник наукових праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій», Дніпропетровськ. – 2011. – № 15. – С. 33–44.
7. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі числового моделювання плоского деформованого стану // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 16–24.
8. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник «Надежность и долговечность машин и сооружений». – 2010. – № 33. – С. 153–166.
9. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием // Прикл. механика – 2010. – 46, №3. – С. 70 – 76.
10. Сборник: Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948. – 460с.
11. Аркулис Г. Э., Дорогобид В. Г. Теория пластичности. – М.: Металлургия, 1987. – 352с.
12. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К.: Наук. думка, 1976. – 320с.
13. Хемминг Р. В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 399 с.
14. Саврук М. П. Механика разрушения и прочность материалов: В – Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620с.
15. Зюкина Е. Л. Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения.// Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, – Казань, – т.26. – 2004 – С. 151–160.