

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИММЕТРИЙ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ

**К. А. ТРАПЕЗОН, В. Г. АБАКУМОВ**

*Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев*

Определены технические параметры двух типов концентраторов ультразвуковой энергии, являющиеся активными элементами ультразвуковых колебательных систем. Приведены расчетные соотношения, исходя из которых у разработчиков появляется возможность осуществить оценку ультразвуковых конструкций по такому основному параметру, как усиление продольных колебаний. Определены энергетические характеристики рассмотренных конфигураций концентраторов, проведен количественный анализ их энергетической эффективности. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании ультразвукового оборудования различного назначения.

### ВВЕДЕНИЕ

Комбинированные концентраторы акустической энергии применяются в различных областях, например, в качестве составных элементов ультразвуковой медицинской техники в травматологии, нейрохирургии, хирургии, стоматологии. Применения подобные акустические устройства находят также при сварке, резке, размерной обработке металлических материалов, пластмасс, керамики, твердой очистке при различных исследованиях конструкций. Несмотря на отмеченное широкое применение концентраторов энергии анализ современной литературы показал не только ограниченность числа моделей концентраторов разной конфигурации для практического использования, но и отсутствие качественной теории проектирования комбинированных акустических концентраторов, пригодной для их предварительного сравнения по основным техническим и энергетическим параметрам.

### 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОНЦЕНТРАТОРОВ

Первый вид рассматриваемого комбинированного концентратора (обозначим К1) имеет известный вид ступенчатого концентратора, для которого справедлив закон

$$D(x) = \begin{cases} D, & x \in (-\alpha, 0]; \\ D_1 & x \in (0, \beta), \end{cases} \quad (1)$$

где  $D, D_1$  – произвольные постоянные (диаметры сечений), выбираемые в зависимости от требуемых присоединительных размеров частей концентратора; примем, что  $D_1 > D$ . Для ступенчатых концентраторов решение волнового уравнения колебаний [1] в функциях перемещений имеет вид

$$W(x) = a \sin kx + b \cos kx, \quad x \in (-\alpha; 0];$$

$$W_1(x) = a_1 \sin kx + b_1 \cos kx, \quad x \in (0; \beta)$$

где  $a, a_1, b, b_1$  – некоторые постоянные коэффициенты;

Из граничных условий для концентратора со свободными концами вида (1)

$$W'(x = -\alpha) = W_1'(x = \beta) = 0,$$

можно получить  $b = -a \frac{\cos k\alpha}{\sin k\alpha}$ ;  $b_1 = a_1 \frac{\cos k\beta}{\sin k\beta}$ . Подставив в зависимости для  $W(x)$  и  $W_1(x)$  полученные соотношения, определим

$$W = -A \cos k(x + \alpha); W_1 = A_1 \cos k(x - \beta).$$

Условия сопряжения для данного ступенчатого концентратора имеют вид

$$W(x = 0) = W_1(x = 0); ED^2W'(x = 0) = ED_1^2W_1'(x = 0),$$

где  $E$  – модуль упругости. Отсюда следует, что

$$A_1 = -A \frac{\cos k\alpha}{\cos k\beta}, \quad A_1 = A \left( \frac{D}{D_1} \right)^2 \frac{\sin k\alpha}{\sin k\beta},$$

и уравнение собственных частот будет

$$D^2 \operatorname{ctg} k\beta + D_1^2 \operatorname{ctg} k\alpha = 0. \quad (2)$$

Усиление ступенчатого концентратора определяют из выражения

$$M = \frac{W(x = -\alpha)}{W_1(x = \beta)} = -\frac{A}{A_1} = \frac{D_1^2 \sin k\beta}{D^2 \sin k\alpha}. \quad (3)$$

Приведенные соотношения позволяют найти конфигурацию ступенчатого концентратора с такими, например, параметрами:  $\alpha = 1/2$ ;  $\beta = 1/2$ ;  $k = 3.14$ ;  $D = 7$  мм;  $D_1 = 7 \cdot \sqrt{10.394}$ ; и усилением  $M = 10.394$ . Конфигурация и характерные размеры концентратора данного типа, предназначенного для работы на частоте 11 кГц, приведены на Рис.1,а, где общая длина  $l = 226.6$  мм для титанового сплава ВТ3-1 ( $E_{\text{Тт}} = 1.14 \times 10^5$  МПа;  $\gamma_{\text{Тт}} = \rho g = 4.5$  г/см<sup>3</sup>) и  $l = 229.67$  мм для стали 45 ( $E_{\text{ст}} = 2.03 \cdot 10^5$  МПа;  $\gamma_{\text{ст}} = \rho g = 7.8$  г/см<sup>3</sup>).

Второй вид комбинированного концентратора (обозначим К2) представлен законом:

$$D(x) = \begin{cases} a \cosh(mx), & x \in (0, \alpha) \\ b = \text{const} & x \in (\alpha, 1), \end{cases} \quad (4)$$

Для концентратора К2 на основе метода симметрий были получены соотношения (5). Анализ этих соотношений позволил найти конфигурацию концентратора с параметрами:  $\alpha = 0.741$ ;  $k = 3.953$ ;  $m = 3.094$ ;  $q = 2.8$ ;  $\lambda = 2.461$  и усилением  $M = 10.394$ , аналогичном усилению К1. При этом, отношение концевых диаметров концентратора выбрано как  $\delta = 5$ . Примем, что для К2  $D(x = 0) = 7$  мм и  $D(x = 1) = 35$  мм. Конфигурация и характерные размеры концентратора данного типа, предназначенного для работы на частоте 11 кГц, приведены на Рис.1,б, где общая длина  $l = 285,27$  мм для титанового сплава ВТ3-1 и  $l = 289,14$  мм для стали 45 при диаметре рабочего конца  $d = 7$  мм.

$$\left. \begin{aligned}
 W(x) &= \frac{B \cos \lambda \alpha}{\cosh m \alpha \cos k \beta} \cos k(x-1); \\
 W'(x) &= -k \frac{B \cos \lambda \alpha}{\cosh m \alpha \cos k \beta} \sin k(x-1); \\
 W_1(x) &= \frac{B \cos \lambda x}{\cosh m x}; \\
 W_1'(x) &= \frac{-m \sinh(m x) [B \cos \lambda x] - \cosh m x [B \lambda \sin \lambda x]}{(\cosh m x)^2}; \\
 \lambda \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda \alpha + \left( \sqrt{(\lambda \alpha)^2 + (m \alpha)^2} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{(\lambda \alpha)^2 + (m \alpha)^2}}{q} \right) + m \alpha \tanh m \alpha &= 0; \\
 M &= \cosh(m \alpha) \frac{\cos \left( \frac{\sqrt{(\lambda \alpha)^2 + (m \alpha)^2}}{q} \right)}{\cos \lambda \alpha};
 \end{aligned} \right\} (5)$$

где  $W(x)$  – решение для призмы;  $W_1(x)$  – решение для переменной части;  $\lambda = \sqrt{k^2 - m^2}$ ;  $k = 2\pi f l \sqrt{\rho / E}$  – собственное (волновое) число;  $\beta = 1 - \alpha$ ;  $q = \alpha / \beta$ ;  $\rho$  – плотность материала.

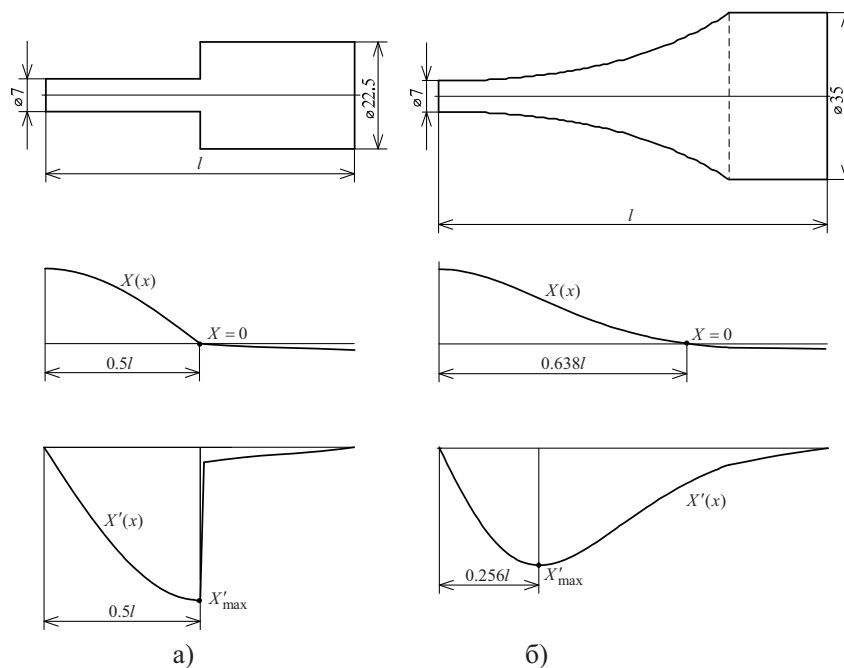


Рис. 1. Профили концентраторов: а) – К1; б) – К2

## 2. СРАВНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для концентратора К1, если принять, что  $W_1(x = -1/2) = y_0$ , где  $y_0$  – реальное значение амплитуды, например в мм, которая может быть измерена при проведении эксперимента, из полученного выше соотношения получим

$$-A \sin(\pi / 2) = X_0 = y_0,$$

откуда  $A = -y_0$ . Используя методику [2], можно определить зависимости для расчета потребляемой энергии  $W$ , рассеиваемой энергии  $\Delta W$  а также выражение для расчета объема концентратора К1

$$W = \frac{\pi^3 E \cdot y_0^2 D^2}{32l} \left[ 1 + \left( \frac{D}{D_1} \right)^2 \right]; \quad (6)$$

$$\Delta W = \frac{\eta N E \pi^{n+2}}{4l^n} (-y_0)^{n+1} D^2 \times \left[ \int_{-1/2}^0 (\cos(\pi x))^{n+1} dx + \left( \frac{D}{D_1} \right)^{2n} \int_0^{1/2} (\cos(\pi x))^{n+1} dx \right]; \quad (7)$$

$$V = \frac{\pi l}{8} (D^2 + D_1^2). \quad (8)$$

где  $N = \frac{2^{n+1}(n-1)}{n(n+1)}$  и  $\eta, n$  – геометрические параметры петли гистерезиса, которые определяются для данного материала на основе зависимости логарифмического декремента затухания  $\delta$  и наблюдаемых механических напряжений  $\sigma$ . Исходя из (8) можно определить, например, что для титанового сплава ВТ3-1 объем К1 равен  $49.66 \text{ см}^3$ ; когда используется сталь 45, объем равен  $50.33 \text{ см}^3$ . Используя алгоритм из [2], определяем предельно допустимые значения рабочих амплитуд К1 по модулю:  $[X_0] = 0.228 \text{ мм}$  для сплава ВТ3-1 и  $[X_0] = 0.101 \text{ мм}$  для стали 45.

Для концентратора К2, считая, что  $W_1(x = 0) = X_0$ , где  $X_0$  – численное значение амплитуды которая может быть определена при эксперименте, найдем

$$B = X_0 \frac{\cosh(0)}{\cos(0)} = y_0.$$

Из условия  $D(x = 0) = d_0$  [мм], можно определить

$$d_0 = a \cosh(0) = a = 7 \text{ мм}.$$

В сечении  $x = \alpha$  (середина составного концентратора)

$$D(x = \alpha) = b = a \cosh(m\alpha).$$

Используя методику [2], можно определить зависимости для расчета потребляемой энергии  $W$ , рассеиваемой энергии  $\Delta W$ , а также выражение для расчета объема концентратора К2

$$W = \frac{\pi E}{8l} (y_0)^2 (d_0)^2 \int_0^\infty \left( \frac{\lambda \cosh(mx) \sin(\lambda x) + m \sinh(mx) \cos \lambda x}{\cosh(mx)} \right)^2 dx + \frac{\pi E}{8l} \cdot (y_0)^2 \cdot (d_0)^2 \left( \frac{k \cos(\lambda \alpha)}{\cos(k\beta)} \right)^2 \int_\alpha^1 (\sin(k(x-1)))^2 dx \quad (9)$$

$$\Delta W = \frac{\eta NE \pi}{4l^n} (y_0)^{n+1} (d_0)^2 \int_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{(\lambda \sin \lambda x + m \tanh mx \cos \lambda x)^{n+1}}{(\cosh(mx))^{n-1}} dx + \frac{\eta NE \pi}{4l^n} (y_0)^{n+1} (d_0)^2 \left( \frac{k \cos \lambda \alpha}{\cos k\beta} \right)^{n+1} \frac{1}{(\cosh(m\alpha))^{n-1}} \int_\alpha^1 (-1)^{n+1} (\sin k(x-1))^{n+1} dx; \quad (10)$$

$$V = \frac{\pi l d_0^2}{4} \left[ \frac{\sinh(2m\alpha) + 2m\alpha}{4m} + (\cosh(m\alpha))^2 \cdot (1 - \alpha) \right]$$

Так же как и для К1, определим предельные амплитуды  $X_0$  для концентратора К2. Используя алгоритм из [2], определим что  $[X_0] = 0.387$  мм для сплава ВТ3-1 и  $[X_0] = 0.171$  мм для стали 45.

Из сравнения энергетических характеристик при  $X_0 = 0.101$  мм (зависимости (9) и (10)) для двух материалов концентратора К2 следует: потребляемая энергия титанового концентратора меньше в 1.757 раза, рассеиваемая – меньше в 6.5521 раз (для К1 – меньше в 9,19 раз), коэффициент рассеивания энергии меньше в 3.78 раз. Объем концентратора К2 для титанового сплава ВТ3-1 равен  $118.6 \text{ см}^3$ , для стали -  $V = 120.2 \text{ см}^3$ .

### 3. АНАЛИЗ КОНЦЕНТРАТОРОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

При выборе лучшего из двух титановых концентраторов К1 и К2 сразу можно отметить некоторое преимущество К2 по значению предельной амплитуды перемещений  $[X_0]$ , так как отношение  $[X_0]_2 / [X_0]_1 = 0.387/0.228=1.697$ , вес при этом оказывается большим у составного концентратора К2:  $V_4 / V_3 = 118.6/49.66=2.38$ . Общая длина рассматриваемых концентраторов также разная: 285.27 мм у К2 против 226.6 мм у К1. Сравнение по энергетическим показателям для материала ВТ3-1 проводим, как и ранее, при одинаковой амплитуде  $X_0 = 0.228$  мм, являющейся предельной для худшего из комбинированных концентраторов, т.е. К1. Вычислив соотношения (6)-(7) и (9)-(10) найдем соответственно

$$W_{K1} = 135.907 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}, \Delta W_{K1} = 0.626 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}, (\Delta W / W)_{K1} = 4.606 \cdot 10^{-3};$$

$$W_{K2} = 227.455 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}, \Delta W_{K2} = 0.885 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}, (\Delta W / W)_{K2} = 3.892 \cdot 10^{-3}.$$

Как видим, при использовании титанового сплава ВТ3-1 у К2 по сравнению с К1 потребляемая энергия выше в 1.673 раза, а рассеиваемая – в 1.413 раз.

Согласно соотношению из [3] при  $n_1 = n_2 = 1.25$  получим оценку эффективности рассматриваемых концентраторов с учетом рассеивания энергии, которые обладают одинаковым усилением продольных колебаний ( $M = 10.394$ ):

$$\frac{(y_{0_{K1}})^T}{(y_{0_{K2}})^T} = 1.25 \sqrt{\frac{(\Delta W)_{K2}}{(\Delta W)_{K1}}} = 1.25 \sqrt{\frac{0.885}{0.626}} = 1.319,$$

то есть реальная амплитуда у концентратора К1 будет выше на 31% чем К2. Однако при этом не стоит забывать об известных недостатках, которые присуще составным комбинированным концентраторам. Речь прежде всего идет о недолговечности работы последних вследствие быстрого перегрева в области изменения диаметров, а также о недостаточной строгости общей теории, положенной в основу расчета составных ступенчатых концентраторов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ комбинированных концентраторов по энергетическому критерию. Показано, что ступенчатый концентратор в режиме граничных амплитуд дает лучшие результаты, чем составной концентратор с катеноидальной составляющей. На практике при длительной эксплуатации в резонансном режиме ввиду известных недостатков ступенчатых концентраторов отмеченное теоретическое преимущество может и не подтвердиться, в том числе из-за несовершенства теории расчета – например из-за несовпадения расчетных и реальных условий сопряжения ступеней.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле – М.: Физматгиз, 1959. – 440, [1] с.
2. Абакумов В.Г., Трапезон К.А. О проектировании акустических концентраторов с учетом внутреннего рассеяния энергии // Акустичний вісник. – 2007. – Т. 10, № 1. – С. 3–16.
3. Abakumov V. G. A design of processes of excitation and concentration of vibrations is in the transformers of acoustic energy / V. G. Abakumov, K. A. Trapezon // Modern problems of radio engineering, telecommunications and computer science : 19-23 february 2008 y. : work mater. — Lviv, 2008. — P. 78-81.