

СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ В СЛУЧАЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

С.О. ПАПКОВ

Севастопольский национальный технический университет

На основе метода суперпозиции решение первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы в случае вынужденных колебаний сводится к квазирегулярной бесконечной системе. На собственных частотах получено нетривиальное решение однородной бесконечной системы, которое дает возможность построить собственные формы колебаний. Приводятся примеры численной реализации алгоритма.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что исследование собственных значений и нормальных форм колебаний является ключом к пониманию физических процессов, описываемых математическим аппаратом. Для вынужденных установившихся колебаний конечных упругих тел при исследовании спектра используются два основных аналитических метода – метод суперпозиции и метод однородных решений. В силу того, что точные решения подобных задач практически отсутствуют, оба метода сводят задачу к некоторой системе линейных уравнений. Исследование собственных частот и форм колебаний для второй основной задачи в случае прямоугольной области можно найти в монографии В.Т. Гринченко, В.В.Мелешко [1]. Первая основная граничная задача для прямоугольника рассматривалась в статье [2], для конечного цилиндра в [3]. Хотя из общей теории [4] известно, что рассматриваемая задача имеет вещественный дискретный спектр, публикации, посвященные данной проблеме, отсутствуют.

1. СВЕДЕНИЕ К ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим следующую краевую задачу для прямоугольной области $\{(X, Y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$ в безразмерных координатах $x = X/a$; $y = Y/a$:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \bar{\mathbf{u}} + \left(\frac{\pi\Omega}{2}\right)^2 \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1)$$

(где ν – коэффициент Пуассона, Ω – безразмерная частота колебаний, $\eta = \frac{b}{a}$)

при однородных условиях на вектор смещений $\bar{\mathbf{u}} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$:

$$\mathbf{u}_x|_{x=\pm 1} = \mathbf{u}_y|_{x=\pm 1} = \mathbf{u}_x|_{y=\pm \eta} = \mathbf{u}_y|_{y=\pm \eta} = 0$$

При построении общего решения уравнений упругости в случае осесимметричных колебаний использовался метод разделения переменных для уравнений скалярного и векторного потенциалов, который позволяет записать известные решения [1] для слоев $x \in [-1; 1]$ и $y \in [-\eta; \eta]$:

$$u_x^I = C_0 \sin \Omega_1 x + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \operatorname{sh} q_{1m} x + D_m \operatorname{sh} q_{2m} x) \cos \beta_m y; \quad u_y^I = -\sum_{m=1}^{\infty} (C_m \frac{\beta_m}{q_{1m}} \operatorname{ch} q_{1m} x + D_m \frac{q_{2m}}{\beta_m} \operatorname{ch} q_{2m} x) \sin \beta_m y;$$

$$u_x^{II} = -\sum_{m=1}^{\infty} (A_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{ch} p_{1m} y + B_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{ch} p_{2m} y) \sin \alpha_m x; \quad u_y^{II} = A_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{sh} p_{1m} y + B_m \operatorname{sh} p_{2m} y) \cos \alpha_m x,$$

где $\alpha_m = \pi m$, $\beta_m = \frac{m\pi}{\eta}$, $q_{l,m}^2 = \beta_m^2 - \Omega_l^2$, $p_{l,m}^2 = \alpha_m^2 - \Omega_l^2$ ($l=1,2$), $\Omega_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}} \Omega$, $\Omega_2 = \frac{\pi \Omega}{2}$.

Для определения спектра граничной задачи (2) общее решение уравнений (1) выбирается в виде суммы решений для полос $x \in [-1; 1]$ и $y \in [-\eta; \eta]$:

$$\vec{u} = (u_x^I + u_x^{II}) \vec{i} + (u_y^I + u_y^{II}) \vec{j}$$

Тогда краевые условия (2), после разложения входящих в них функций по полной системе тригонометрических функций, приводят к парной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_m x_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} y_n; \\ \Delta_m y_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n; \end{cases} \quad m \in \mathbb{N} \quad (2)$$

где $x_n = \frac{(-1)^n B_n \operatorname{sh} p_{2n} \eta}{\eta}$; $y_n = (-1)^n D_n \operatorname{sh} q_{2n}$; $C_m = -\frac{\operatorname{sh} q_{2m}}{\operatorname{sh} q_{1m}} D_m$; $A_m = -\frac{\operatorname{sh} p_{2m} \eta}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} B_m$

$$a_{mn} = \frac{2\Omega_1^2 \alpha_m}{(1-2\nu)(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} \frac{1}{\tilde{\Delta}_m}, \quad b_{mn} = \frac{2\Omega_1^2 \beta_m}{(1-2\nu)(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} \frac{1}{\Delta_m};$$

$$\Delta_m = \frac{\beta_m}{q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} - \frac{q_{2m}}{\beta_m} \operatorname{cth} q_{2m}; \quad \tilde{\Delta}_m = \eta \left(\frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} \eta - \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{cth} p_{2m} \eta \right).$$

Чтобы исследовать регулярность (2) используем значение ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2},$$

тогда ряд из модулей коэффициентов системы (2) можно вычислить точно:

$$S_{2m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{mn}}{\tilde{\Delta}_m} \right| = \frac{1}{|\tilde{\Delta}_m|} \sum_{n=1}^{N_a} (|a_{mn}| - a_{mn}) + \frac{2\alpha_m}{|\tilde{\Delta}_m|} \left(\frac{\eta}{2p_{2m}} \operatorname{cth} p_{2m} \eta - \frac{\eta}{2p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} \eta + \frac{1}{2p_{1m}^2} - \frac{1}{2p_{2m}^2} \right);$$

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_{mn}}{\Delta_m} \right| = \frac{1}{|\Delta_m|} \sum_{n=1}^{N_b} (|b_{mn}| - b_{mn}) + \frac{2\beta_m}{|\Delta_m|} \left(\frac{1}{2q_{2m}} \operatorname{cth} q_{2m} - \frac{1}{2q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} + \frac{1}{2q_{1m}^2} - \frac{1}{2q_{2m}^2} \right), \quad (3)$$

где $N_a = [\eta \sqrt{\max(0, (\Omega_2/\pi)^2 - 1)}]$ и $N_b = [\sqrt{\max(0, (\Omega_2/\pi)^2 - 1/\eta^2)}]$ - номера, начиная с которых коэффициенты рядов становятся строго положительными ($[x]$ – целая часть действительного x). При $m \rightarrow \infty$ можно найти следующие асимптотические представления для величин в последней формуле ($l=1,2$):

$$q_{lm} \approx \beta_m - \frac{\Omega_l^2}{2\beta_m}; \quad p_{lm} \approx \alpha_m - \frac{\Omega_l^2}{2\alpha_m}; \quad \tilde{\Delta}_m \approx \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\alpha_m^2} \eta; \quad \Delta_m \approx \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\beta_m^2}. \quad (4)$$

Если подставить (4) в (3) можно получить оценку при $m \rightarrow \infty$:

$$S_m = \frac{1}{3-4\nu} + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (5)$$

Из (5) следует, что полученная система (2) является квазирегулярной. Действительно, при $\nu \neq 0,5$ для любого значения частоты Ω всегда можно найти номер N^* , начиная с которого $S_m < 1$.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ.

Для построения нетривиального решения $\{x_m, y_m\}$ бесконечной системы (2) на собственных значениях используем замену переменных

$$x_m = \sum_{j=1}^{N^*} (X_m^{j1} x_j + X_m^{j2} y_j); \quad y_m = \sum_{j=1}^{N^*} (Y_m^{j1} x_j + Y_m^{j2} y_j); \quad (m > N^*), \quad (6)$$

где $N^* = N^*(\Omega, \eta)$ - номер, начиная с которого для (2) выполняются условия регулярности.

Подстановка (6) в (2) приводит к совокупности бесконечных систем с одинаковой матрицей относительно введенных новых неизвестных:

$$\begin{cases} X_m^{j1} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_m} \sum_{n=N^*+1}^{\infty} a_{mn} Y_n^{j1}; \\ Y_m^{j1} = \frac{1}{\Delta_m} \sum_{n=N^*+1}^{\infty} b_{mn} X_n^{j1} + \frac{b_{mj}}{\Delta_m}; \end{cases} \quad \begin{cases} X_m^{j2} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_m} \sum_{n=N^*+1}^{\infty} a_{mn} Y_n^{j2} + \frac{a_{mj}}{\tilde{\Delta}_m}; \\ Y_m^{j2} = \frac{1}{\Delta_m} \sum_{n=N^*+1}^{\infty} b_{mn} X_n^{j2}; \end{cases} \quad (7)$$

$(m > N^*, j = 1, 2, \dots, N^*)$

и к конечной однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно первых неизвестных $\{x_m, y_m\}_{m=1}^{N^*}$, коэффициенты которой зависят от решений (7):

$$\begin{cases} x_m = \sum_{n=1}^{N^*} \left(\sum_{j=N^*+1}^{\infty} \frac{a_{mj}}{\tilde{\Delta}_m} Y_j^{n1} \right) x_n + \sum_{n=1}^{N^*} \left(\frac{a_{mn}}{\tilde{\Delta}_m} + \sum_{j=N^*+1}^{\infty} \frac{a_{mj}}{\tilde{\Delta}_m} Y_j^{n2} \right) y_n; \\ y_m = \sum_{n=1}^{N^*} \left(\frac{b_{mn}}{\Delta_m} + \sum_{j=N^*+1}^{\infty} \frac{b_{mj}}{\Delta_m} X_j^{n1} \right) x_n + \sum_{n=1}^{N^*} \left(\sum_{j=N^*+1}^{\infty} \frac{b_{mj}}{\Delta_m} X_j^{n2} \right) y_n; \end{cases} \quad (8)$$

Как можно заметить из предложенного алгоритма, точность построения собственных форм оказывается в прямой зависимости от точности решения систем (7). Согласно асимптотической формуле (5) бесконечные системы (7) являются вполне регулярными. Очевидно, что свободные члены данных систем являются ограниченными (для регулярной части уравнений (2) величины $\Delta_m, \tilde{\Delta}_m$ заведомо отличны от нуля). Таким образом, согласно известной теореме [5] каждая из систем (7) имеет единственное ограниченное решение. Более того, на основе обобщения достаточного признака Б.М.Кояловича [6], можно доказать, что для решения систем (7) справедлив следующий асимптотический закон:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m^{ji} \alpha_m^\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m^{ji} \beta_m^\lambda = a_{ij}, \quad (j=1,2,\dots,N^*; i=1,2) \quad (9)$$

где показатель степени λ определяется как корень уравнения $\cos \frac{\pi\lambda}{2} = \frac{\lambda+1}{3-4\nu}$, лежащий на отрезке $[0; 1]$. Из-за ограниченности объема статьи, вывод формулы (9) не приводится.

Использование закона (9) позволяет применить к численному решению систем (7) метод улучшенной редукции, который при небольшом числе удерживаемых в системе неизвестных, позволяет добиться удовлетворительной точности.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В статье [7] был предложен алгоритм вычисления собственных значений второй основной краевой задачи для упругой призмы на основе проверки достаточного признака существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Используя данный подход, строится зависимость собственных частот краевой задачи от отношения сторон призмы (рис.1) для коэффициента Пуассона $\nu = 0,25$.

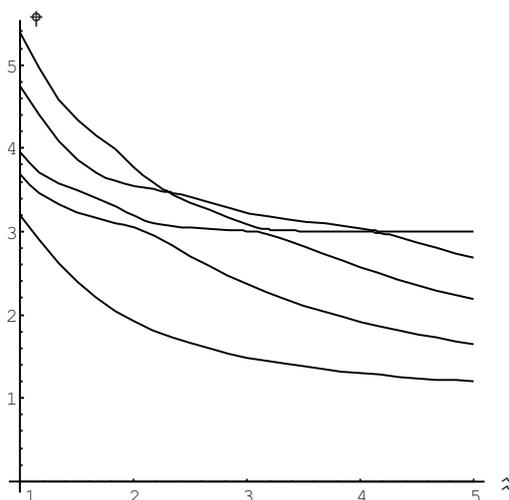


Рис 1. Спектр собственных частот первой краевой задачи для прямоугольника.

Реализуя, описанный выше, подход к построению собственных форм колебаний, получаем для них представление через нетривиальное решение системы (2):

$$\mathbf{u}_x = -\eta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{p_{2m} \operatorname{ch} p_{2m} y}{\alpha_m \operatorname{sh} p_{2m} \eta} - \frac{\alpha_m \operatorname{ch} p_{1m} y}{p_{1m} \operatorname{sh} p_{1m} \eta} \right) (-1)^m x_m \sin \alpha_m x + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} q_{2m} x}{\operatorname{sh} q_{2m}} - \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} \right) (-1)^m y_m \cos \beta_m y;$$

$$\mathbf{u}_y = \eta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} p_{2m} y}{\operatorname{sh} p_{2m} \eta} - \frac{\operatorname{sh} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \right) (-1)^m x_m \cos \alpha_m x - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q_{2m} \operatorname{ch} q_{2m} x}{\beta_m \operatorname{sh} q_{2m}} - \frac{\beta_m \operatorname{ch} q_{1m} x}{q_{1m} \operatorname{sh} q_{1m}} \right) (-1)^m y_m \sin \beta_m y.$$

Одним из критериев точности полученных результатов является численная проверка граничных условий, из которых выводится система (2). В таблице 1 представлена точность выполнения однородных граничных условий при $\eta = 1$, $\nu = 0, 25$

для первой собственной формы на частоте $\Omega_1^* = 3,19$ (N – количество первых неизвестных $\{x_m, y_m\}$, удерживаемых в методе улучшенной редукции).

Табл.1.

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$u_x(x, \eta)$ при $N = 5$	$-7,2 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$-2,5 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	0
$u_x(x, \eta)$ при $N = 10$	$-5,1 \cdot 10^{-5}$	$9,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	0
$u_x(x, \eta)$ при $N = 20$	$5,9 \cdot 10^{-7}$	$6,0 \cdot 10^{-7}$	$-2,9 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	0

При относительно небольшом объеме вычислений, получаем удовлетворительную точность для собственных форм колебаний. Увеличивая порядок конечных систем в методе улучшенной редукции, получаем возможность добиться заданной точности.

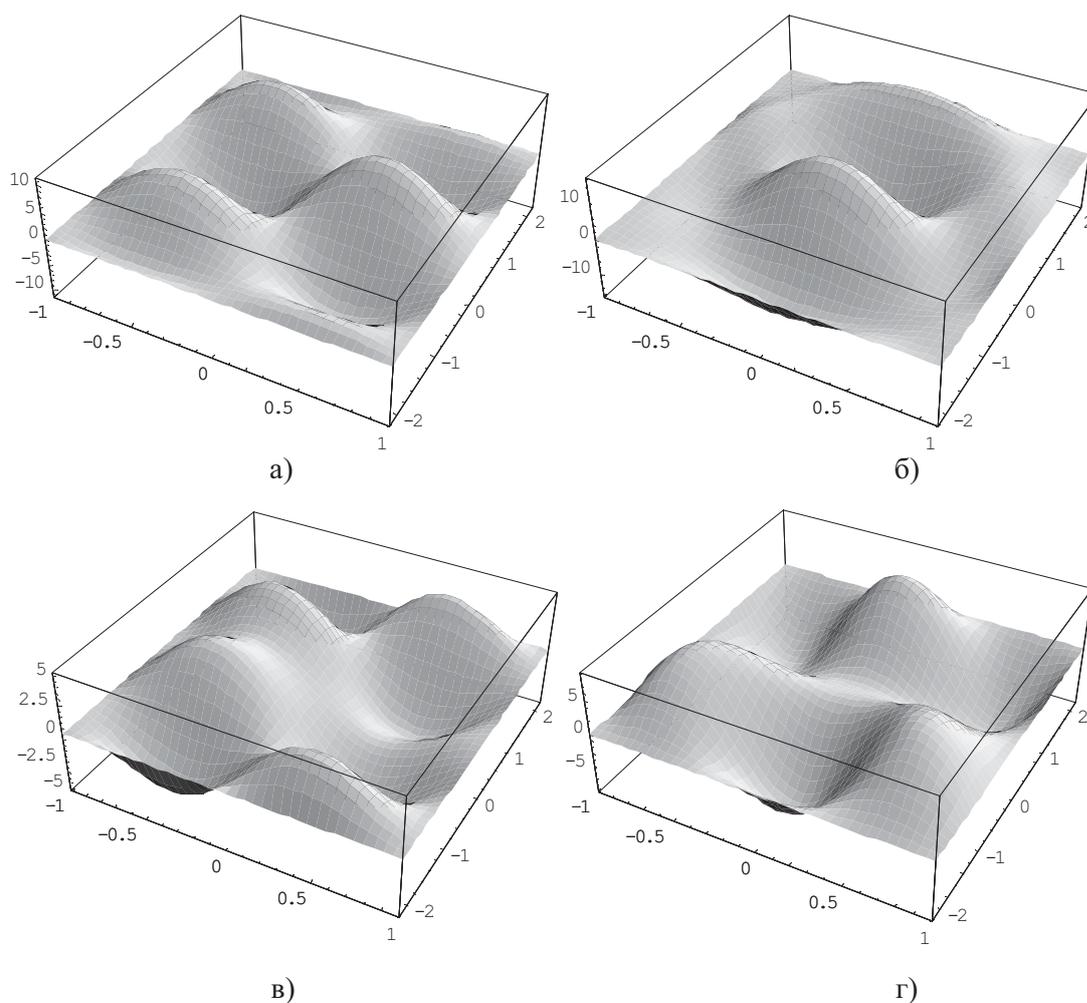


Рис. 2. Собственные формы колебаний, вблизи «плато» собственных частот

Вычисления показывают, что вдоль кривых на рис.1. собственные формы меняются мало, в тоже время вблизи «плато», например при $\eta = 2,2$, где приближаются вторая и третья собственные частоты $\Omega_2^* = 2,93$ и $\Omega_3^* = 3,09$, наблюдаются существенные различия между собственными модами (рис.2). На рис.2а и рис.2б представлены компоненты u_x и u_y для второй собственной моды, соответственно на рис.2в и рис. 2г данные компоненты для третьей собственной моды.

ВЫВОДЫ

Предложенный алгоритм построения собственных форм колебаний первой основной краевой задачи для прямоугольника, дает возможность, при относительно небольшом объеме вычислений получить для них аналитическое представление. Благодаря наличию асимптотики бесконечных систем (9) при построении нетривиального решения однородной бесконечной системы (4) удается использовать эффективный метод улучшенной редукции, что позволяет получить собственные формы с наперед заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Власов А.Г. Метод переопределенных рядов в некоторых краевых задачах математической физики.1. – Вопр. динам. Теории распространения сейсм. волн., 1959. -3.- С. 403-463.
3. Hutchinson J.R. Axisymmetric Vibrations of a Solid Elastic Cylinder Encased in a Rigid Container // JASA. –1967.- vol. 42, №2 – P. 398 -402.
4. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. - М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука., 1984.– 752 с.
6. Коялович Б.М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1930. – III. – С. 41–167.
7. Папков С.О., Чехов В.Н. О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доповіди НАН України. - 2004 - №10 - С.57-62.