

ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ПЕРІОДИЧНІЙ СИСТЕМІ ЗВ'ЯЗАНИХ СТЕРЖНІВ З ПОПЕРЕЧНИМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ Й АКУСТИЧНИМ ЗАПОВНЕННЯМ

В. Н. ОЛІЙНИК

*Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Желябова, 8/4, 03680, Київ-180, МСП, Україна
тел. (044) 456-69-83; e-mail: v_oliyuk@yahoo.com*

Розглянуто можливість поширення гармонічних хвиль у системі двох періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками паралельних пружних стержнів. При цьому вважалося, що обмежені стержнями й сусідніми перегородками об'єми заповнені акустичним середовищем (газом чи рідиною), а самі стержні коливаються синфазно або протифазно (симетричний і антисиметричний випадки). Із застосуванням методу Флоке одержано відповідні дисперсійні рівняння, проаналізовано їхні корені. Синфазні коливання стержнів, що супроводжуються об'ємними деформаціями газонаповнених камер, породжують симетричну хвилю, яка в довгохвильовому наближенні відповідає об'ємній хвилі в еквівалентному однорідному середовищі. При цьому ефективна пружність системи формується пружними характеристиками стержнів і акустичного середовища на рівноправній основі. Водночас, антисиметрична хвиля є еквіволюміальною в тому сенсі, що об'єми обмежених стержнями й перегородками камер в кожний момент часу залишаються незмінними, а заповнююче акустичне середовище відіграє роль приєднаної маси. Як наслідок, у цьому випадку ефективна пружність системи і відповідна швидкість поширення хвилі виявляються значно нижчими, ніж при синфазних коливаннях стержнів. Одержаний результат дозволяє на якісному рівні пояснити деякі експериментальні дані стосовно хвильових властивостей пористих газонаповнених середовищ, зокрема, легеневої паренхіми.

ВСТУП

Існуючі моделі гетерогенних середовищ з газорідним заповненням виявились неспроможними пояснити ряд експериментальних результатів, одержаних при вимірюванні швидкості звуку в препарованих легенях. Так, при імпульсному навантаженні стінки легені можуть виникати специфічні хвилі [1, 2], які не є поперечними і не можуть бути ототоженні з поздовжніми хвилями першого або другого роду в рамках моделі Біо [3]. Нагадаємо, що хвиля першого роду є об'ємною хвилею в однорідному середовищі з осередненими макропараметрами, а хвилю другого роду (дифузійну хвилю Біо – Столла) пов'язують з інтенсивними рухами порової рідини відносно пружного скелета пористого середовища [4].

Очевидно, пояснення тут слід шукати у різному характері деформування паренхіми на рівні її мікроструктури при різних типах навантаження. Виходячи зі сказаного, продуктивною видається ідея оцінювання ефективних акустичних параметрів легеневої паренхіми за допомогою акустомеханічних періодичних структур. “Піноподібна” будова

легеневої тканини (її основу складають ацинуси – компактні сукупності респіраторних пухирців-альвеол) визначає можливість вибору моделі у вигляді лінійної ланцюгової системи, складеної з тонкостінних пружних елементів, якими обмежені заповнені газом об’єми. Нас цікавитиме низькочастотна асимптотика хвильових властивостей об’єкта, коли довжина результуючої хвилі значно перевищує масштаб його структури. Тому регуляризація модельної геометрії не повинна суттєво вплинути на значення ефективних акустичних параметрів. Оскільки ж ми припускаємо, що поширення досліджуваних хвиль не супроводжується значним витоком альвеолярного газу в бронхіальне дерево, доцільно розглянути періодичну структуру з замкненими газонаповненими комірками. Спрощення постановки до квазіодновимірної системи дозволить при збереженні основних фізичних рис об’єкта максимально унаочнити процес одержання й інтерпретації результатів.

Основна мета цього дослідження полягає в демонстрації якісних відмінностей у механізмах формування хвиль при різних способах навантаження акусто-пружних структур з закритими камерами, що призводить до суттєвої різниці у значеннях відповідних фазових швидкостей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На рис. 1 зображено систему, яка складається з двох паралельних пружних стержнів товщиною d , періодично (з кроком l) підкріплених перпендикулярними до них жорсткими масивними тонкостінними перегородками довжиною $2h$. Вважаємо, що матеріал стержнів має густину ρ_t , модуль Юнга E_t і коефіцієнт Пуассона ν , а перегородка – погонну (на одиницю площі) масу γ . Обмежені перегородками порожнини заповнені акустичним середовищем (рідиною або газом) з густиною ρ_g і швидкістю звуку c_g . Механічними й акустичними втратами будемо нехтувати. Задамо гармонічний закон зміни усіх полів з часом – $e^{-i\omega t}$.

Представимо направляючі стержні у вигляді послідовності з’єднаних ланок довжиною l , кожній з яких (і відповідній камері) присвоїмо номер $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тоді u_n^\pm позначатиме зміщення n -ої ланки стержня (знак “+” приписуємо верхньому з них, а “-” – нижньому) [5, 6].

Очевидно, що будь-який тип руху в системі може бути скомпонований з незалежних випадів синфазного й протифазного руху верхнього та нижнього стержнів (рис. 2). Тоді

$$u_n^- = \pm u_n^+,$$

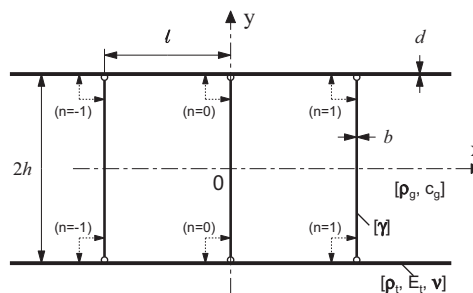


Рис. 1. Геометрія періодичної акустопружної структури

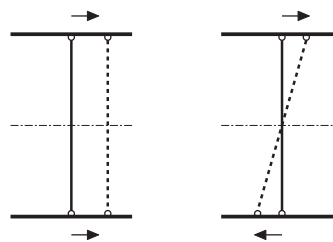


Рис. 2. Можливі типи деформацій (синафзна й протифазна)

де знак плюс відповідає синфазному (синхронному) деформуванню стержнів, а мінус – протифазному, коли один з них відстає на половину періоду фбо довжини хвилі. Надалі формально вважаємо $u_n^+ \equiv u_n$.

Потенціал швидкості в n -ій камері позначимо як ϕ_n , а відповідні акустичний тиск і коливальну швидкість – p_n і v_n . Тоді

$$p_n = \frac{d\phi_n}{dt} = -i\omega\phi_n, \quad v_n = -\frac{d\phi_n}{dx}.$$

У своїх областях існування поля u_n і ϕ_n задовольняють рівняння

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + k_t^2 u_n = 0, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E_t^*}{\rho_t}}, \quad E_t^* = \frac{E_t}{1-\nu}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} + k_g^2 \phi = 0, \quad k_g = \frac{\omega}{c_g}. \quad (2)$$

Умови спряження кінематичних величин у вузлах – точках кріплення перегородок будуть виглядати так:

$$u_n|_{x=nl} = u_{n+1}|_{x=nl}, \quad -\frac{d\phi_n}{dx}\Big|_{x=nl} = -\frac{d\phi_{n+1}}{dx}\Big|_{x=nl}, \quad (3)$$

$$-\frac{d\phi_n}{dx}\Big|_{x=nl} = \begin{cases} -i\omega u_n|_{x=nl} & \text{(синфазний рух),} \\ -i\omega \frac{y}{h} u_n|_{x=nl} & \text{(протифазний рух).} \end{cases} \quad |y| \leq h. \quad (4)$$

Оскільки стержні вважаємо недеформівними в поперечному напрямку, то додатково вимагаємо рівності нулю нормальних швидкостей на верхній і нижній стінках камер:

$$\frac{d\phi_n}{dy}\Big|_{y=\pm h} = 0, \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n. \quad (5)$$

Постановку граничної задачі завершуємо накладанням умови динамічної рівноваги у вузлах – на перегородках, позначивши $\sigma_n = \frac{E_t}{1-\nu} \frac{du_n}{dx}$:

- для сил (синфазний рух) –

$$-2d(\sigma_n - \sigma_{n+1})|_{x=nl} - 2i\omega\rho_g h(\phi_n - \phi_{n+1})|_{x=nl} + \omega^2 2\gamma h u_n|_{x=nl} = 0; \quad (6)$$

- для моментів (протифазний рух) –

$$-2d(\sigma_n - \sigma_{n+1})|_{x=nl} - i\omega\rho_g \int_{-h}^h (\phi_n - \phi_{n+1})|_{x=nl} dy + \omega^2 \frac{\gamma}{3} h u_n|_{x=nl} = 0. \quad (7)$$

Загальний вигляд розв'язку для зміщень n -ої ланки стержня (1) універсальний для всіх типів руху:

$$u_n = U_{1n} e^{ikt_x} + U_{2n} e^{-ikt_x}. \quad (8)$$

Акустичне поле всередині n -ої камери, яке задовольняє умову ((5)), буде таким:

- синфазний рух (одновимірний розподіл) –

$$\phi_n = \Phi_{1n} e^{ik_g x} + \Phi_{2n} e^{-ik_g x}; \quad (9)$$

- протифазний рух (істотно двовимірний розподіл) –

$$\phi_n = \sum_{s=0}^{\infty} (\Phi_{1n} e^{i\alpha_s x} + \Phi_{2n} e^{-i\alpha_s x}) \sin \frac{\pi(2s+1)}{2h} y, \quad \alpha_s = \sqrt{k_g^2 - \frac{\pi^2(2s+1)^2}{4h^2}}. \quad (10)$$

ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ

Пошук дозволеного для поширення в системи хвильового числа $\varkappa = \omega/c$ і відповідної фазової швидкості проводимо за допомогою метода Флоке – вимагаючи від розв’язків (з урахуванням часового множника) пропорційності до шуканої біжучої хвилі, $\sim e^{i(\varkappa x - \omega t)}$ [7, 8]. При цьому умови спряження полів природним чином доповнимо умовами періодичності на просторовому крокові структури з урахуванням відповідного набігу фази:

$$u_n|_{x=(n-1)l} e^{i\varkappa l} = u_{n+1}|_{x=nl}, \quad \left. \frac{du_n}{dx} \right|_{x=(n-1)l} e^{i\varkappa l} = \left. \frac{du_{n+1}}{dx} \right|_{x=nl}, \quad (11)$$

$$\phi_n|_{x=(n-1)l} e^{i\varkappa l} = \phi_{n+1}|_{x=nl}, \quad \left. \frac{d\phi_n}{dx} \right|_{x=(n-1)l} e^{i\varkappa l} = \left. \frac{d\phi_{n+1}}{dx} \right|_{x=nl}, \quad |y| \leq h. \quad (12)$$

За рахунок підстановки кінематичних умов спряження в загальні розв’язки знаходимо зв’язок акустичного поля всередині n -ої камери зі зміщеннями її бічних стінок. При цьому всі невідомі коефіцієнти виносяться за знаки сум, тобто вдається уникнути роботи з нескінченними системами. Остаточні співвідношення періодичності в сукупності з відповідною умовою динамічної рівноваги зводяться до однорідної лінійної алгебраїчної системи. Прирівнюючи до нуля її визначник і розкриваючи його, одержуємо дисперсійне рівняння відносно \varkappa :

$$e^{2i\varkappa l} - 2q e^{i\varkappa l} + 1 = 0, \quad (13)$$

$$q = \begin{cases} \frac{\sin k_g l \cos k_t l + \frac{\rho_g c_g h}{\rho_t c_t d} \sin k_t l \cos k_g l - \frac{\gamma h}{2\rho_t d l} k_t l \sin k_g l \sin k_t l}{\sin k_g l + \frac{\rho_g c_g h}{\rho_t c_t d} \sin k_t l} & \text{(синфаз.);} \\ \frac{\cos k_t l - \left(\eta_\alpha \frac{\rho_g h}{\rho_t d} + \frac{1}{6} \frac{h}{l} \frac{\gamma}{\rho_t d} \right) k_t l \sin k_t l}{1 - \eta_\varkappa \frac{\rho_g h}{\rho_t d} k_t l \sin k_t l} & \text{(протифаз.).} \end{cases}$$

У випадку протифазного руху до коефіцієнта q входять числові ряди

$$\eta_\alpha = -2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_s l \sin \alpha_s l} \frac{1}{(2s+1)^4}; \quad \eta_\varkappa = -2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_s l}{\alpha_s l \sin \alpha_s l} \frac{1}{(2s+1)^4}.$$

ДОВГОХВИЛЬОВА АСИМПТОТИКА

Рівняння (13) має дійсний розв'язок $\varkappa = \arccos q/l > 0$ при $|q| < 1$. На щастя, у цікавому для нас довгохвильовому наближенні для обох розглянутих випадків справедливо $0 < q < 1$, що відповідає можливості поширення в системі гармонічної хвилі з шуканою фазовою швидкістю c . Враховуючи асимптотики відповідних функцій при малих аргументах, в наближенні $\omega \rightarrow 0$ ($k_g l, k_t l \rightarrow 0$), одержимо

$$c_{\text{синфаз.}} \approx \sqrt{\frac{\rho_t d c_t^2 + \rho_g h c_g^2}{\rho_t d + \rho_g h + \frac{h}{l} \gamma}}, \quad c_{\text{протифаз.}} \approx \sqrt{\frac{\rho_t d c_t^2}{\rho_t d + 2(\eta_\alpha - \eta_\kappa) \rho_g h + \frac{h}{3l} \gamma}}. \quad (14)$$

Зауважимо, що при цьому $\eta_\alpha \approx 0.105$, $\eta_\kappa \approx 0.0091$ ($\eta_\alpha > \eta_\kappa$).

Найважливіший висновок з формули (14) полягає в тому, що при антисиметричних рухах системи об'ємна пружність акустичного наповнення камер “не задіяна” у формуванні фазової швидкості результуючої хвилі. Це відбувається за рахунок перетікання середовища всередині камери, що створює ефект, відомий з гідроакустики як акустичне коротке замикання у ближньому полі [9]. При синфазних рухах і пружна й акустична компоненти виявляються “рівноправними”, що практично відповідає ефективній об'ємній хвилі Райса для легень [10].

Зауважимо, що внаслідок різного розподілу полів зміщень в системі значення приєднаних мас перегородок і акустичного заповнення в обох випадках відрізняються, однак на практиці ці відмінності значною мірою нівелюватимуться. Для легеневої тканини масою газової фази можна знехтувати. Що ж до поперечних стінок, то, швидше за все, для нерегулярної структури паренхіми їхній внесок в загальну інерційність структури буде не таким помітним. Це дозволяє стверджувати, що $c_{\text{синфаз.}} > c_{\text{протифаз.}}$. При виборі фізичних і геометричних параметрів, близьких до максимально заповнених повітрям легень людини [3], одержуємо оцінки $c_{\text{протифаз.}} \approx 16.4$ м/с і $c_{\text{синфаз.}} \approx 62.3$ м/с, які в цілому узгоджуються з експериментальними даними [2] і [10] відповідно.

ВИСНОВКИ

За допомогою методу Флоке знайдено параметри хвилі, яка може поширюватись в акустопружній системі двох періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками паралельних пружних стержнів. При цьому вважалось, що обмежені стержнями й сусідніми перегородками об'єми заповнені акустичним середовищем.

Показано, що для антисиметричної моди коливань об'єми заповнених газом камер не змінюються і внутрішнє акустичне середовище виступає в ролі приєднаної маси. Як наслідок, у цьому випадку ефективна пружність системи і відповідна швидкість поширення хвилі виявилися значно нижчою, ніж при синфазних (симетричних) коливаннях стержнів. Таким чином, у двох розглянутих випадках періодична структура може підтримувати поширення двох незалежних гармонічних хвиль. Поведінка моделі вказує на принципову можливість формування у певних типах пористих середовищ хвиль з різними фазовими швидкостями, в залежності від типу збудження коливань.

Цей механізм дає ймовірне тлумачення експериментальних результатів з визначення швидкості звуку в паренхімі легень. Ймовірно, що при прозвучуванні паренхіми або її механічному збудженні через зовнішні тканини грудної клітки площа поверхні легені, на яку падає сигнал-збудник, виявляється достатньою для того, щоб ініціювати “симетричну” хвилю Райса з інтенсивним об’ємним деформуванням альвеолярного газу. Натомість, при безпосередньому локальному ударному навантаженні бічної поверхні плеври у паренхімі переважають “антисиметричні” еквіволюмінальні коливання альвеол, при яких задіяна лише пружність їхніх стінок. Тому відповідна фазова швидкість завжди буде нижчою, ніж для хвилі Райса.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Jahed M., Lai-Fook S. J., Bhagat P. K., Kraman S. S.* Propagation of stress waves in inflated sheep lungs // *J. Appl. Physiol.*– 1989.– **66**, N 6.– P. 2675–2680.
2. *Butler J. P., Lehr J.L., Drazen J. M.* Longitudinal elastic wave propagation in pulmonary parenchyma // *J. Appl. Physiol.*– 1987.– **62**, N 4.– P. 1349–1355.
3. *Олійник В. Н.* Особливості поширення хвиль у легеневій тканині // *Акуст. вісн.*– 2007.– **10**, N 2.– P. 64–78.
4. *Biot M. A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1962.– **34**, N 9, Pt. 1.– P. 1254–1264.
5. *Олійник В. Н.* Поширення хвиль у системі двох паралельних стержнів, періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками і зв’язаних з акустичним середовищем // *Акуст. вісн.*– 2008.– **11**, N 1.– С. 60–67.
6. *Олійник В. Н.* Антисиметричні хвилі в системі двох паралельних стержнів, періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками і зв’язаних з акустичним середовищем // *Акуст. вісн.*– 2008.– **11**, N 2.– С. 36–44.
7. *Heckl M. A.* Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1964.– **36**, N 7.– P. 1335–1343.
8. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.– М.: Наука, 1973.– 344 с.
9. *Вовк И. В., Гринченко В. Т.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.
10. *Rice D. A.* Sound speed in pulmonary parenchyma // *J. Appl. Physiol.*– 1983.– **54**, N 1.– P. 304–308.