СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ АЭРОАКУСТИКИ ДЛЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА СТОКСА

ПЕТР В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев,
тел.:453-26-60

ВВЕДЕНИЕ

Весь перечень и анализ теоретических моделей аэроакустики не является целью данного доклада из-за ограниченности объёма. Поэтому кратко остановимся лишь непосредственно на тех моделях, которые описывают генерацию и распространение звука в вязких течениях. Их появление и развитие обусловлено созданием и совершенствованием реактивной, турбореактивной авиации. К числу теоретических работ, в которых исследованы вопросы генерации звука в вязких течениях, можно отнести работы, которые развивают идею *акустической аналогии* Лайтхилла [1], а также работы, продолжающие общий подход Блохинцева [2] для идеальной сжимаемой среды. Ниже приводится краткий анализ сделанного в этих работах.

КРАТКИЙ АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСИКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ДАННОЙ ОБЛАСТИ

После выхода в научный свет акустической аналогии Лайтхилла ряд исследований были направлены на анализ и проверку основных положений этой теории. Напомним основные идеи, положенные в основу акустической аналогии Лайтхилла:

- *звук генерируется за счёт флуктуации момента количества движения при взаимодействии течения и твердой границы, в чём принципиальное отличие его от активного излучения в классическом понимании;*
- *источник звука локализован в виде квадруполей;*
- *среда, в которой распространяется звук, считается однородной за исключением области локализации источника звука;*
- *обратное влияние звука на поток пренебрежимо мало.*

Первое и четвёртое положение данной теории и сегодня остаются в силе. Что же касается второго и третьего положений, то они далеко не всегда выполняются. Это и послужило поводом для дальнейших исследований, развития акустической аналогии. К числу данных работ следует отнести, кроме работ Лайтхилла, исследования Филипса, Лили, Хоу. Более детально с ними можно познакомится в [3],[4]. Перечисленные авторы каждый по- своему пытался учесть неоднородные свойства среды, но чётко отделить звук от остального потока так и не смог.

К числу более свежих работ в этой области следует отнести работы [5],[6]. Федорченко в работе [5] пытается исследовать генерацию звука с помощью выделения из общего течения “фонового” потока, усреднить по времени зону неоднородности течения, найдя при этом удобную систему координат. И это в чём-то похоже на второе положение теории Лайтхилла. Однако исследования в этой области показывает [6], что система уравнений, описывающая генерацию звука нестационарным потоком, на самом деле связывает компоненты основного (не “фонового”, а локально неоднородного) течения и возникающие в нём акустические возмущения. Более того, это нестационарное течение само же их и порождает во время взаимодействия с границей. В этой связи термин “фоновое” течение, вообще говоря, неуместен, поскольку течение принимает непосредственное участие в генерировании звука.

Попытка выделить различные компоненты источников, участвующих в процессе звукообразования, в общем случае также не представляется возможным. Все составляющие в сложном нестационарном течении взаимосвязаны. Следовательно, провести разделение, т.е. декомпозицию, выражаясь словами Федорченко, невозможно. Например, изменения массовых сил и энтропии количественно приводят к изменению кинематических параметров течения, что в свою очередь влияет на процесс звукообразования. В конце работы [5] говорится, что “…этот критический анализ будет полезен в развитии новых, более точных, теоретических моделей в этой важной научной области”.

Ниже приводится одна из таких моделей.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГЕНЕРАЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

В соплах реактивных двигателей поток газа перед выходом наружу претерпевает следующие изменения. Сначала струя охлаждается, а затем, непосредственно перед выходом в окружающую среду, происходит её резкий нагрев. Из термодинамики известно, что в таком случае энтропия среды, следовательно, и вязкость и скорость распространения звука переменна. Наиболее общим случаем среды, учитывающей перечисленные особенности, является вязкий газ Стокса [7]. Система уравнений, описывающая динамику вязкого газа, записывается в виде:

- уравнение Навье-Стокса:

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} - grad(p + \frac{2}{3}\mu div\vec{V}) + 2Div(\mu\dot{S}), \qquad (1)$$

здесь $\dot{S}$ - тензор скоростей деформации.

- уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{V}) = 0, \qquad (2)$$

- уравнение баланса энергии:

$$\rho\frac{d}{dt}(CvT + \frac{V^2}{2}) = \rho\vec{F}\cdot\vec{V} + div(P\vec{V}) + \rho q. \qquad (3)$$

Уравнения (1) и (3) можно переписать в следующем более удобном виде:

$$\rho(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \nabla\frac{V^2}{2} + \frac{1}{2}\vec{V}\times rot\vec{V}) = \rho\vec{F} - \nabla p - \frac{2}{3}\nabla(\mu div\vec{V}) + 2Div(\mu\dot{S}), \qquad (4)$$

$$\rho\frac{d}{dt}(h + \frac{V^2}{2}) = \rho\vec{F}\cdot\vec{V} + \frac{\partial p}{\partial t} + div(2\mu\cdot grad(\frac{V^2}{2} - \frac{1}{2}\vec{V}\times rot\vec{V}) - \frac{2}{3}\mu\vec{V}div\vec{V} + \frac{\mu}{\sigma}gradh). \qquad (5)$$

Далее используем подход, изложенный в работе [6]. В результате получим:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - a^2\Delta\rho = div(\rho(\nabla\frac{v^2}{2} + rot\bar{v}\times\bar{v})) + div(\bar{v}div\rho\bar{v}) + \nabla a^2\cdot\nabla\rho + \\ &-div\rho\vec{F} + \frac{2}{3}\Delta(\mu div\vec{V}) - 2div(Div(\mu\dot{S}))\end{aligned} \qquad (6)$$

Это уравнение отличается от полученных в [6] уравнений вязкими компонентами и массовыми силами. Если вязкость среды переменна, то вынести её из под знака дифференциального оператора нельзя. В соплах РД, как уже упоминалось выше, присутствуют резкие градиенты температуры перед выходом течения наружу, что и обуславливает изменение вязкости течения.

Если же в рассмотрение берётся вязкий газ, но температурные градиенты не существенны, тогда вязкость можно приближенно считать постоянной. В таком случае вместо уравнения (4) можно использовать следующую упрощенную запись [8],[9]:

$$\rho(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\frac{V^2}{2}+\frac{1}{2}\vec{V}\times rot\vec{V})=\rho\vec{F}-\nabla p+\mu\Delta\vec{V}+\frac{\mu}{3}graddiv\vec{V}\,. \tag{7}$$

Проделав все те же выкладки, что и с (4), получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-a^2\Delta\rho=div(\rho(\nabla\frac{v^2}{2}+rot\overline{v}\times\overline{v}))+div(\overline{v}div\rho\overline{v})+\nabla a^2\cdot\nabla\rho+\\-div\rho\vec{F}-\mu div(\Delta\vec{V})-\frac{\mu}{3}\Delta div\vec{V}\end{gathered} \tag{8}$$

Если мы говорим о том, что тепловые потери можно не учитывать, то полная энтропия в данном случае должна сохраняться:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+(\vec{V},\nabla S)=0\,. \tag{9}$$

Таким образом, для вязкой сжимаемой среды имеем два случая описания:

1) система уравнений (2),(5),(6);
2) система уравнений (2),(8),(9).

Случай идеальной сжимаемой среды рассмотрен в [6].

Но указанные системы уравнений (случаи 1) и 2)) непосредственно генерацию звука пока не описывают.

Выделим теперь звук из общего течения. Обратим внимание на следующее. В работе [6] подразумевается, что в рассмотрение принимаются лишь те малые возмущения скорости, плотности, которые являются звуком. Действительно, в нестационарном потоке возмущенные переменные течения включают в себя не только звук. Здесь и турбулентные пульсации, локальные неоднородности течения. Выполнить разграничение влияния отдельных физических процессов на звукообразование также не просто [5]. Поэтому, поступим так, как и в работе [6], полагая, что возмущенные переменные $\rho+\rho',\vec{V}+\vec{V}',h+h'$ включают в себя все нестационарные эффекты поля скорости и плотности. И лишь добавки $\vec{V}',\rho',h'$ в них – это звук, всё остальное, что не есть звук, остаётся в $\vec{V},\rho,h$. *Такое представление отличается от всех известных попыток описания генерации звука нестационарным потоком*. Все делали это иначе. Лайтхилл [1] считал среду невозмущенной вокруг локального распределения источника, не выделив даже в полученном им уравнении малые звуковые возмущения. В ряде последующих работ по примеру Лайтхилла, забывая, что звук являет собой малые возмущения течения (по определению), также выводят уравнения, не выделяя малые звуковые возмущения из него. И лишь в работах [2], [5] данные возмущения выделяются, считая остальную часть потока спокойной (“фоновой”). Подставим возмущённые значения $\rho+\rho',\vec{V}+\vec{V}',h+h'$ в уравнения (2),(5),(6), а затем вычтем из полученного эти же невозмущенные уравнения, опустив величины второго порядка малости. В результате чего получим:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho\vec{V}'+\vec{V}'\cdot\nabla\rho+\rho' div\vec{V}+\vec{V}\cdot\nabla\rho'=0\,, \tag{10}$$

$$\rho\frac{d}{dt}(h'+\vec{V}\vec{V}')+\rho'\frac{d}{dt}(h+\vec{V}^2)=(\rho\vec{V}'+\rho'\vec{V})\vec{F}+a^2\frac{\partial\rho'}{\partial t}+div(2\mu grad(\vec{V}\vec{V}'))-$$
$$-\frac{1}{2}(\vec{V}\times rot\vec{V}'+\vec{V}'\times rot\vec{V})-\frac{2}{3}\mu(\vec{V}div\vec{V}'+\vec{V}'div\vec{V})+\frac{\mu}{\sigma}gradh' \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}-a^2\Delta\rho'=div[\rho(\nabla\vec{V}\vec{V}')+\rho'(\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2})+\vec{V}\vec{V}')+\rho\cdot(rot\vec{V}\times\vec{V}'+rot\vec{V}'\times\vec{V})+$$
$$\rho'\cdot rot\vec{V}\times\vec{V}]+div[\vec{V}\cdot div(\rho\vec{V}'+\rho'\vec{V})]'+div[\vec{V}'div\rho\vec{V})]+\nabla a^2\cdot\nabla\rho'-div\rho'\vec{F}+ \qquad (12)$$
$$+\frac{2}{3}\Delta(\mu div\vec{V}')-2div(Div\mu\dot{S}')$$

В уравнении (11) использовалось соотношение $\frac{\partial p'}{\partial t}=a^2\frac{\partial\rho'}{\partial t}$, которое можно легко получить (смотри [9]) на основе свойства инвариантности первого дифференциала.

Как уже заметил читатель, при выводе последнего соотношения вязкость μ не варьировалась, как это было сделано для параметров $\rho,\vec{V},h$. Почему? Да потому, что физиками установлено, что вязкость есть свойство среды не зависящее от давления и плотности, а зависит лишь от температуры. Поэтому, поскольку звук есть локальное изменение давления в виде чередующихся разрежений – сжатий, то малые изменения звуковых переменных, обозначенные здесь штрихом, практически не изменят μ. Изменение вязкости будет проявляться лишь при достаточно существенных изменениях термодинамических свойств системы, которые не входит в выделенные малые звуковые возмущения. Вязкость определяется в каждой точке пространства как функция температуры [8]:

$$\mu=\frac{const\cdot T^{3/2}}{T+C}, \qquad \text{где } C\approx 122 \text{ для воздуха.} \qquad (13)$$

Во-вторых, нужно изначально понимать и помнить, что все слагаемые с вязкостью μ лишь способствуют затуханию звуковых волн, а не в коей мере не генерации или усилению звука. Не учитывать их нельзя ещё и по той причине, что вязкость достаточно резко возрастает с увеличением температуры - как $T^{3/2}$ (см. (13)).

Итак, получив систему из трёх уравнений (10),(11),(12), в которой присутствуют пять неизвестных $\vec{V}',\rho',h'$, мы её фактически разрешить не можем. Однако есть выход из положения, если использовать следующее. В классической механике жидкости известно [11], что любое поле скорости можно представить в виде:

$$\vec{V}=\vec{V}_p+grad(\frac{1}{2}D)+\frac{1}{2}\omega_p\times\vec{r}\,. \qquad (14)$$

Здесь $D=const$ - эллипсоид деформации, $\vec{\omega}=rot\vec{V}$ - вектор завихренности. Таким образом, ”*любое мгновенное состояние движения сплошной среды является в каждой точке суперпозицией поступательного движения, растяжения по трём взаимно ортогональным осям и вращения этих осей как твёрдого тела*”. Поэтому, следуя описанной выше идеологии, в качестве $\vec{V}'$ возьмём лишь ту часть малых приращений, которая представляет собой только растяжение-сжатие, а всё остальное оставим в выражении для скорости $\vec{V}$. Действительно, каким бы сложным не было течение, в каждый конкретный момент времени звук определяют лишь компоненты тензора деформации, отвечающие за растяжение-сжатие. Всё остальное, как об этом говорится многими известными учёными, не звук, а лишь факторы, влияющие на его распространение, затухание или некоторое конвективное усиление. А раз так, то эту добавку можно представить в виде $\vec{V}' = grad\varphi = \nabla\varphi$, поскольку в уравнении (14) так представляется слагаемое, отвечающее за сжатие и растяжение. Итак, скорость возмущённого течения представим в виде $\vec{V} + \nabla\varphi$. Теперь систему уравнений (10),(11),(12) перепишем так:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho\Delta\varphi + \nabla\varphi\cdot\nabla\rho + \rho' div\vec{V} + \vec{V}\cdot\nabla\rho' = 0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\rho\frac{d}{dt}(h' + \vec{V}\nabla\varphi) + \rho'\frac{d}{dt}(h + \vec{V}^2) = (\rho\nabla\varphi + \rho'\vec{V})\vec{F} + a^2\frac{\partial\rho'}{\partial t} + div(2\mu grad(\vec{V}\nabla\varphi)) - \\ &-\frac{1}{2}(\vec{V}\times rot\nabla\varphi + \nabla\varphi\times rot\vec{V}) - \frac{2}{3}\mu(\vec{V}div\nabla\varphi + \nabla\varphi div\vec{V}) + \frac{\mu}{\sigma}gradh'\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} - a^2\Delta\rho' = div[\rho(\nabla(\vec{V}\nabla\varphi)) + \rho'(\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) + \vec{V}\nabla\varphi) + \rho\cdot rot\vec{V}\times\nabla\varphi + \\ &+\rho'\cdot rot\vec{V}\times\vec{V}] + div[\vec{V}\cdot div(\rho\nabla\varphi + \rho'\vec{V})] + div[\nabla\varphi div\rho\vec{V})] + \nabla a^2\cdot\nabla\rho' - \\ &-div\rho'\vec{F} + \frac{2}{3}\Delta(\mu\Delta\varphi) - 2div(Div\mu\dot{S}')\end{aligned} \tag{17}$$

Система уравнений (15),(16),(17) есть полная система уравнений относительно неизвестных φ, ρ', h'. Для того чтобы решить задачу акустики необходимо сначала решить задачу гидродинамики, а затем, зная все необходимые гидродинамические переменные, решить систему уравнений (15),(16),(17) для переменных φ, ρ', h'.

Случай упрощения. Если газ вязкий, но теплообменом можно пренебречь. В этом случае (15) остаётся тем же. А другие два уравнения (16),(17) изменятся:

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla S') + (\vec{V}', \nabla S) = 0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} - a^2\Delta\rho' = div[\rho(\nabla(\vec{V}\nabla\varphi)) + \rho'(\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) + \vec{V}\nabla\varphi) + \rho\cdot rot\vec{V}\times\nabla\varphi + \\ &+\rho'\cdot rot\vec{V}\times\vec{V}] + div[\vec{V}\cdot div(\rho\nabla\varphi + \rho'\vec{V})] + div[\nabla\varphi div\rho\vec{V})] + \nabla a^2\cdot\nabla\rho' - \\ &-div\rho'\vec{F} - \mu div(\Delta\nabla\varphi) - \frac{\mu}{3}\Delta^2\varphi\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь S - энтропия. В данном случае вместо энтальпии h в качестве третьей переменной используется энтропия S.

В уравнениях (15),(16),(17) переменные $\vec{V}, \rho, h$ есть скорость, плотность и энтальпия без малых возмущений φ, ρ', h', описывающих звук. Однако если мы вместо переменных без малых возмущений подставим полные переменные $\vec{V} + \varphi, \rho + \rho', h + h'$ (или $S + S'$) то при перемножении этих переменных с малыми величинами φ, ρ', h' (или S'), которые присутствуют в каждом из слагаемых всех уравнений системы (15),(16),(17) в первой степени, получим точность второго порядка малости за счёт неточной подстановки полных гидродинамических переменных. Но это та точность, с которой была выведена система уравнений (15),(16),(17) – до величин второго порядка малости. Это же касается и системы уравнений (15),(18),(19). Из данного анализа также следует, что обратное влияние звука на поток пренебрежимо мало.

ВЫВОДЫ

1. В данной работе предложена простая модель выделения звуковых колебаний из основного сложного нестационарного течения, на основании которой получена система трёх уравнений, описывающая генерацию звука вязким нестационарным теплопроводящим течением.
2. Рассмотрены основные случаи упрощения этой системы.
3. Показано, что представленная модель выделения звуковых колебаний из общего течения является точной с точностью до величин второго порядка малости. При этом отброшенные величины практически не оказывают обратного воздействия на поток.

Автор выражает огромную благодарность академику В.Т.Гринченко за постоянное внимание и поддержку теоретических исследований в данном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M.J.* On Sound Generated Aerodynamicly,I: General Theory.// Proceedings of the Royal Society.London.1952.211A, №1107.pp.564-587.
2. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.Наука.1981.206с.
3. Авиационная акустика // *под ред. А.Г. Мунина* ,М. Машиностроение.1986.т.1.244.
4. *Голдстейн М.Е.* Аэроакустика.-М.Машиностроение,1981.296с
5. *Fedorchenko A.T.* On some fundamental flaws in present aeroacoustic theory.// Journal of Sound and Vibration.2000.V.232(4), p.719-782.
6. *Лукьянов П.В.* Система уравнений аэроакустики для среды с завихренностью: общий случай. // *Акустичний симпозіум Консонанс-2007. 25-27 вересня 2007р.с.163-168.*
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика.- М.Наука.,1986,736с.
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. - М.Наука.,1987,840с.
9. *Путята В.И., Сідляр М.М.* Гідроаеромеханіка. - К: Видавництво Київського Університету, 1963.-480с.
10. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. – М.: Издательство Иностранной литературы.,1963,256с.