# О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ЗАДАННОГО СПЕКТРА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ЗА СЧЁТ ВЫБОРА НЕОБХОДИМОГО ЗАКОНА ВВОДА ЭНЕРГИИ

**В.С. КРУТИКОВ**
*Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев*
*E-mail: iipt@iipt.com.ua*

Предложен новый, авторский подход решения проблем подвижных границ (ПГ), подвижных проницаемых границ (ППГ), вопросов управления волновыми явлениями. Как известно, волновые процессы могут происходить только в областях с подвижными границами. Абсолютно неподвижных границ в Природе нет. Эти проблемы существовали длительное время с момента создания волнового уравнения и по настоящее время, около трёхсот лет. Отсутствие знаний и невозможность определения функций управления делало решения этих фундаментальных физических проблем непредсказуемыми и невозможными. Основными препятствиями при этом являются существенная нелинейность, а также и, в особенности, некорректность (многозначность) обратных волновых задач с ПГ и ППГ, что не позволяло их решить никакими способами, ни численно, ни аналитически и т.д. В математической физике подобные задачи не рассматривались.

Одним из возможных способов получения волн давления заданной формы (спектра) может служить расширение полости в жидкости по определенному закону. Расширение полости может быть вызвано различными импульсными источниками, например, взрывом взрывчатых веществ или газовых смесей, электрическим разрядом, лазерным импульсом, выхлопом сжатого газа, падением груза на поверхность среды и т.д.

Действие импульсных источников сопровождается перемещением границ, пренебречь которыми нельзя. Исследование гидродинамики полости связано с анализом уравнений в частных производных, в частности, волнового с граничными условиями, удовлетворяющимися на подвижных границах, вопросы управления связаны с решением обратных задач для волнового уравнения с подвижными границами - изложенное относится к сложным проблемам математической физики. Данное исследование посвящено установлению аналитических зависимостей между законом подвода энергии к источнику возмущений и формой (спектром) возбуждаемых им гидродинамических волн.

Решение поставленной задачи будем проводить в такой последовательности: определение вида функции $P(r_1,t)$, имеющей заданный спектр; решение обратной гидродинамической задачи с подвижными границами - определение изменения радиуса полости $R(t)$, скорости $v(R(t),t)$, давления на подвижной границе $P(R(t),t)$ по заданному виду функции $P(r_1,t)$; определение закона ввода энергии $E(t)$, необходимой для расширения полости с заданной скоростью $v(R(t),t)$.

**Рассмотрим первый этап:** определение вида функции, имеющей заданный спектр. Этого можно достигнуть, например: 1) используя усовершенствованный метод дискретного быстрого преобразования Фурье [1]; 2) преобразуя функцию времени таким образом, чтобы спектр $P(r_1,t)$ переместился по шкале частот [2] и стал заданным; 3) используя спектр известных функций.

**Второй этап.** Для определения полей скорости и давления расширяющегося поршня по заданной функции $P(r_1,t)$ необходимо решить обратную краевую гидродинамическую задачу с подвижными границами. При этом движение жидкости наиболее полно описывается системой (1) [3], которую в общем случае можно решить численными методами. Эта система для потенциальных движений приводится к уравнению (3) [3]. При $\rho \approx \rho_0$ потенциал скорости в интеграле Коши-Лагранжа можно определять из (3) [3], пренебрегая в нем членами второго и третьего порядков малости, то есть из линейного волнового уравнения (4) [3]. Сформулированная задача относится к классу существенно нелинейных задач с подвижными границами [4], методов точного аналитического решения подобных задач не было [4]. Для обратных задач не было и приближенных. Разработан новый подход к решению задач с подвижными границами, основанный на нахождении зависимости между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в других точках с учетом реальных величин запаздываний. По формулам для $\nu = 3$; для $\nu = 2$; для $\nu = 1$ [5-8] можно реконструировать давление и скорость в любых точках, включая подвижные границы, по давлению в точке волновой зоны заданного спектра.

**Третий этап.** Для случаев электрического разряда, лазерного импульса в жидкости, когда приближенно можно считать, что энергия, выделившаяся в канале, расходуется в основном на увеличение внутренней энергии плазмы и совершение работы расширяющимся каналом над окружающей средой, можно воспользоваться уравнением баланса энергии [9]

$$N(t) = P(R(t),t)\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} + \frac{1}{\gamma-1}\left[\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}V + P\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right]_{r=R(t)}, \qquad (1)$$

где $V$ – объём плазменного поршня. Для вычисления мощности $N(t)$ известны все величины $P$, $v$, $R(t)$, определяемые по упомянутым формулам. Вопросы управления электрическим разрядом в жидкости и обратные волновые задачи рассматривались автором в работах [5-8, 10, 11].

Определение вида функций, имеющих заданный спектр, можно производить, например, используя усовершенствованный метод дискретного быстрого преобразования Фурье [1]; преобразуя функцию времени таким образом, чтобы спектр $P(r_1,t)$ переместился по шкале частот [2] ; используя спектр известных функций. Пусть

$$P(r_1,t) = C\exp(-\alpha t_1) = f(t); \quad C,\alpha - const; \quad t_1 = t - \frac{r_1 - r_0}{a},$$

где $a$ – скорость распространения возмущений; индекс при $t_1$ можно опустить, поскольку спектр функции не зависит от сдвига по шкале времен. Спектр этой функции

$$|S(\omega)| = \int_0^\infty Ce^{-(\alpha+j\omega)t}dt = \left[A^2(\omega)+B^2(\omega)\right]^{1/2}; \; A(\omega) = \frac{Ca}{a^2+\omega^2}; \quad B(\omega) = \frac{C\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Если требуется сместить вещественный спектр амплитуд $|S(\omega)|$, то новая функция, которая имела бы спектральную плотность $S(\omega)$ на частоте $\omega_0 + \omega$, с учетом [2]

$$f_1(t) = f(t)\cos\omega_0 t + f^*(t)\sin\omega_0 t,$$

где $f^*(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[A(\omega)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + B(\omega)\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right]d\omega$, будет иметь вид

$$f_1(t) = C\exp(-\alpha t)\cos\omega_0 t - \frac{1}{\pi}C\exp(-\alpha t)\overline{E}_i(\alpha t)\sin\omega_0 t,$$

где $E_i$ - интегральная показательная функция. Вид кривой $f_1$ близок к затухающей синусоиде. Для количественных оценок возможности получения формы функции давления заданного спектра в точке $r_1$ удобна аппроксимация затухающей синусоидой $P(r_1,t)=B\exp(-\alpha t_1)\sin\omega_1 t$, $B,\alpha,r_0,a-const$.

Рассмотрены примеры. Давление в точке $r_1$ изменяется по закону затухающей синусоиды :

$$P(r_1,t)=B\exp\left[-\alpha\left(t-\frac{r_1-r_0}{a_0}\right)\right]\sin\omega_1\left(t-\frac{r_1-r_0}{a_0}\right)\sigma_0\left(t-\frac{r_1-r_0}{a_0}\right),\qquad(2)$$

спектр ее

$$|s(\omega)|=B\left\{\frac{\omega_1^2}{\left[\left(\alpha^2+\omega_1^2\right)-\omega^2\right]^2+4\alpha^2\omega^2}\right\}^{\frac{1}{2}},\qquad(3)$$

$$\left|s\left(\omega^2=\omega_1^2-\alpha^2\right)\right|_{\max}=\frac{B}{2\alpha},\ \ \omega\text{ - частота.}\qquad(4)$$

С учетом (2) из (6) - (8) [5], получаем для давления и скорости в любых точках и на ПГ:

$$P(r,t)=\frac{r_1}{r}\left\{B\exp\left[-\alpha\left(t-\frac{r-r_0}{a_0}\right)\right]\sin\omega_1\left(t-\frac{r-r_0}{a_0}\right)\right\}-\frac{1}{2}\rho_0 v^2(r,t),\qquad(5)$$

$$v(r,t)\rho_0\frac{r^2}{r_1}=\frac{r}{a_0}\left\{B\exp\left[-\alpha\left(t-\frac{r-r_0}{a_0}\right)\right]\sin\omega_1\xi\sigma_0(\xi)\right\}+$$
$$+\left\{\frac{B\exp(-\alpha\xi)}{\alpha^2+\omega_1^2}\left[-\alpha\sin\omega_1\xi-\omega_1\cos\omega_1\xi\right]\sigma_0(\xi)+\frac{B\omega_1}{\alpha^2+\omega_1^2}\sigma_0(\xi)\right\},\quad \xi=t-\frac{r-r_0}{a_0},\qquad(6)$$

$$P(R(t),t)=\frac{r_1}{R(t)}\left\{B\exp(-\alpha\xi)\sin\omega_1\xi\sigma_0(\xi)\right\}-\frac{1}{2}\rho_0 v^2(R(t),t),\qquad(7)$$

$$v(R(t),t)\rho_0\frac{R^2(t)}{r_1}=\frac{R(t)}{a_0}\left\{B\exp(-\alpha\xi)\sin\omega_1\xi\sigma_0(\xi)\right\}+$$
$$+\left\{\frac{B\exp(-\alpha\xi)}{\alpha^2+\omega_1^2}\left[-\alpha\sin\omega_1\xi-\omega_1\cos\omega_1\xi\right]\sigma_0(\xi)+\frac{B\omega_1}{\alpha^2+\omega_1^2}\sigma_0(\xi)\right\},\quad \xi=t-\frac{R(t)-r_0}{a_0}.\qquad(8)$$

Для вычислений по формулам (7), (8) необходимо знание величины $R(t)$, которая определится из соотношения

$$\left[R_{i+1}^3(t)-r_0^3\right]\rho_0/3r_1=$$
$$=\frac{R_{i+1}(t)}{a_0}\left\{\frac{B\exp(-\alpha\xi)}{\alpha^2+\omega_1^2}\left[-\alpha\sin\omega_1\xi-\omega_1\cos\omega_1\xi\right]\sigma_0(\xi)+\frac{B\omega_1}{\alpha^2+\omega_1^2}\sigma_0(\xi)\right\}+$$
$$+\frac{B}{\alpha^2+\omega_1^2}\left\{\frac{-\alpha\exp(-\alpha\xi)}{\alpha^2+\omega_1^2}\left[-\alpha\sin\omega_1\xi-\omega_1\cos\omega_1\xi\right]\sigma_0(\xi)-\frac{\alpha\omega_1}{\alpha^2+\omega_1^2}\sigma_0(\xi)-\frac{\omega_1\exp(-\alpha\xi)}{\alpha^2+\omega_1^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[-\alpha\cos\omega_1\xi+\omega_1\sin\omega_1\xi\right]\sigma_0(\xi)-\frac{\omega_1\alpha}{\alpha^2+\omega_1^2}\sigma_0(\xi)-\omega_1\xi\sigma_0(\xi)\right\},\quad \xi=t-\frac{R_i(t)-r_0}{a_0}.\qquad(9)$$

Вычисление $R(t)$ из «кубического» уравнения (9) производится, как описано в [5, 10]. Изображено: спектр (3) и соответствующее ему изменение давления в точке $r_1 = 0{,}5$ м волновой зоны (2), где $B = 3$ кгс/см$^2$, $\alpha = 0{,}045 \cdot 10^{-3}$, $a_0 = 1460$ м/с, $\omega_1 = \alpha\sqrt{15}$ с$^{-1}$, $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Спектр имеет максимум при $\omega \approx 170$ с$^{-1}$.

Показаны результаты реконструкции радиуса $R(t)$ по (9), скорости $v(R(t),t)$ по (8), ускорения $\ddot{R}(t)$, давления $P(R(t),t)$ по (7) подвижной границы. Величины ускорения подвижной границы можно определить по формуле

$$\ddot{R}(t) = \frac{r_1}{\rho_0 R^2(t)} \left\{ \frac{R(t)}{a_0} \left[ B(-\alpha)\exp(-\alpha\,\xi)\sin\omega_1\,\xi\,\sigma_0(\xi) + B\exp(-\alpha\,\xi)\omega_1\cos\omega_1\,\xi\,\sigma_0(\xi) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + B\exp(-\alpha\,\xi)\sin\omega_1\,\xi\,\sigma_1(\xi)\right] + B\exp(-\alpha\,\xi)\sin\omega_1\,\xi\,\sigma_0(\xi)\right\}, \qquad (10)$$

где $\xi = t - \dfrac{R(t) - r_0}{a_0}$, $\sigma_1(\xi)$ - функция Дирака, для контроля вычислено $P(R(t),t)$ по известной формуле $P - P_\text{н} = \rho_0\left(3/2\,\dot{R}^2 + \ddot{R}\,R\right)$, совпадение результатов хорошее.

Таким образом, для получения в точке $r_1$ функции давления заданного спектра необходимо иметь характеристики расширяющейся полости (7-10): изменение радиуса, скорости, ускорения и давления на подвижной границе. Если хотим получить параметры расширения полости с помощью электрического разряда в жидкости, тогда мощность $N(t)$, вводимую в канал, можно определить из соотношения (1) с учетом (8) - (9), при этом необходимую величину временного градиента давления $\mathrm{d}P(R(t),t)/\mathrm{d}t$ на подвижной границе можно определить по формуле

$$\frac{\mathrm{d}P(R(t),t)}{\mathrm{d}t} = \frac{r_1}{R(t)} \left\{ B\left[-\alpha\exp(-\alpha\,\xi)\sin\omega_1\,\xi + \omega_1\exp(-\xi\,\alpha)\cos\omega_1\,\xi\right]\sigma_0(\xi) + \right.$$
$$\left. + B\exp(-\alpha\,\xi)\sin\omega_1\,\xi\,\sigma_1(\xi)\right\} - \rho_0\, v\,\dot{v},\ \ \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}. \qquad (11)$$

Проведены соответствующие вычисления. Если получить параметры изменения радиуса, скорости расширения полости, а также закон ввода энергии за такой промежуток времени с помощью электрического разряда в жидкости практически невозможно, то в этом случае нужно подбирать другой импульсный источник ввода энергии или их комбинацию.

Полученные соотношения, являющиеся точными аналитическими решениями волнового уравнения с ПГ, позволяют в широком диапазоне изменений спектра - формы функции давления реконструировать параметры движения полости, определять закон ввода энергии и оптимизировать выбор соответствующих импульсных источников, или дать более точные рекомендации по управлению импульсными процессами. К числу последнего можно отнести, например, получившие широкое распространение шунтирующие элементы, динамическое включение которых позволяет в определенном диапазоне изменять закон ввода энергии в канал [12], различные добавки, изменяющие энергетические характеристики канала, например, водонаполненные экзотермические смеси и т.д., либо электрический разряд в химически активных конденсированных средах [13].

Полученные результаты решения обратных задач для волнового уравнения с линейными и нелинейными условиями в областях с подвижными границами согласуются с результатами решения прямых задач и эксперимента [3, 5-11]. Это делает возможным использование их для обоснованного выбора и решения вопроса управления импульсными источниками, в том числе в конденсированных средах при решении практических задач промышленности, медицины [14], экологии.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Сорелла, Гхош // Приборы для научных исследований. 1984. №8. С. 167-172
2. Харкевич А.А. Избранные труды: в 3-х т. М.: Наука, 1973. Т.2. 587с.
3. Крутиков В.С. // Акуст. журн. 1996. Т. 32. №4. С. 534-540 ( Krutikov VS / / Acoustical Physics. vol. 42. no. 4. 1996. pp. 471-477).
4. Гринберг Г.А. // Прикл. математика и механика. 1967. 31, вып. 2. С. 193-209.
5. Крутиков В.С. // Доклады РАН. 1999. Т. 364. №1. С. 17-20 (Krutikov VS / / Doklady Mathematics. vol. 59. no. 1. 1999. pp. 10-13).
6. Крутиков В.С. // Доклады РАН. 1999. Т. 368. №6. С. 755-758 (Krutikov VS / / Doklady Physics. vol. 44. no. 10. 1999. pp. 674-677)
7. Крутиков В.С. // Доклады РАН. 2006. Т. 406. №1. С. 1-5 (Krutikov VS / / Doklady Physics. vol. 51. no. 1. 2006. pp. 1-5)
8. Крутіков В.С // Доповіді НАНУ. 2006. Т.1. С. 52-58.
9. Наугольных К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971.-155с.
10. Крутиков В.С. Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. К.: Наук. думка, 1985.-125с.
11. Крутиков В.С. // Труды Акустического симпозиума «Консонанс - 2007». Киев, ИГМ НАНУ, 2008. С. 121-126.
12. Иванов А.В., Вовченко А.И., Богаченко О.А. // Техническая электродинамика. 1981. №6 С. 15-20.
13. Вовченко А.И. Взрывные процессы превращения электрической и химической энергии. К.: Наук. думка, 1987.-128с.
14. Грінченко В.Т., Вовк І.В., Мацапура В.Т. Основи акустики. К.: Наук. думка. 2007.-640с.