СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ

Ю.Н. КОНОНОВ, Н.К. ДИДОК

Донецкий национальный университет

В линейной постановке исследуются совместные колебания упругих оснований цилиндрического сосуда и находящейся в ней идеальной жидкости. При решении поставленной задачи гидроупругости использован метод, предложенный в работе М.П. Петренко [1]. Аналогичная задача в упрощенной постановке рассмотрена в [2], а в [3] и [4] для случая, когда основаниями являются мембраны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим механическую систему, представляющую собой сосуд в виде прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты h с жесткой боковой поверхностью Σ и плоскими упругими основаниями. Весь объем сосуда заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ.

Упругие основания представляют собой изотропные пластины, изготовленные из материалов плотности ρ_l и имеющие толщины h_l (здесь и далее индексом l обозначается номер днища: верхнему соответствует $l=1$, нижнему – $l=2$). Днища подвержены воздействию растягивающих усилий T_l в серединной поверхности и обладают изгибной жесткостью D_l.

Рассматриваемая система находится в однородном поле массовых сил $\vec{g}$, направленном вдоль оси цилиндра.

Введем цилиндрическую систему координат $Or\theta z$ так, чтобы ее начало находилось в центре невозмущенного нижнего основания, а ось Oz была направлена противоположно вектору $\vec{g}$. Движение жидкости предполагается потенциальным, а прогибы W_l – малыми по сравнению с характерным размером системы.

Исходная задача гидроупругости в линейной постановке имеет вид:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\chi_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2 \Delta_2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 - \rho g W_1 = \rho \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=h} - \rho g h - \rho \tilde{Q}, \tag{2}$$

$$\chi_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2 \Delta_2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 + \rho g W_2 = -\rho \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=0} + \rho \tilde{Q}. \tag{3}$$

Здесь $\chi_l = \rho_l h_l$, $\tilde{Q}$ – некоторая произвольная функция времени.

Граничные условия:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=0} < \infty, \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=h} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \tag{5}$$

Кроме того, из условия совместности колебаний упругих днищ и несжимаемости жидкости следует соотношение

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} W_1 r dr d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} W_2 r dr d\theta . \tag{6}$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (4), имеет вид

$$\varphi(x, y, z, t) = a_0 + a_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_{ni} e^{k_{ni} z} + B_{ni} e^{-k_{ni} z} \right) J_n (k_{ni} r) \cos n\theta , \tag{7}$$

где $k_{ni} = \dfrac{\mu_{ni}}{R}$, μ_{ni} – положительные корни уравнения $J_n'(\mu) = 0$.

Функции W_1 и W_2 представим в виде обобщенных рядов Фурье-Бесселя

$$W_l = W_{l0} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} W_{lni} J_n (k_{ni} r) \cos n\theta , \tag{8}$$

с коэффициентами

$$W_{l0} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} W_l r dr d\theta , \qquad W_{lni} = \frac{1}{N_{ni}^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} W_l J_n (k_{ni} r) \cos n\theta \, r dr d\theta , \tag{9}$$

$$N_{ni}^2 = \pi R^2 \frac{(1 + \delta_{0n})}{2} J_n^2 (\mu_{ni}) \left(1 - \frac{n^2}{\mu_{ni}^2} \right), \qquad \delta_{0n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Подставив (7) и (8) в (5), получим

$$a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20} ,$$

$$\begin{cases} A_{ni} = \dfrac{1}{2k_{ni} \operatorname{sh} \kappa_{ni}} \left(\dot{W}_{1ni} - \dot{W}_{2ni} e^{-\kappa_{ni}} \right), \\ B_{ni} = \dfrac{1}{2k_{ni} \operatorname{sh} \kappa_{ni}} \left(\dot{W}_{1ni} - \dot{W}_{2ni} e^{\kappa_{ni}} \right), \end{cases} \tag{10}$$

где $\kappa_{ni} = k_{ni} h$.

Соотношения (10) позволяют свести систему (1) – (3) к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} &\chi_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2 \Delta_2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = -\frac{\rho h}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} W_1 r dr d\theta + Q^*(t) - \rho g h + \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n (k_{ni} r) \cos n\theta}{k_{ni} N_{ni}^2 \operatorname{sh} \kappa_{ni}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \operatorname{ch} \kappa_{ni} \right) J_n (k_{ni} r) \cos n\theta \, r dr d\theta, \\ &\chi_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2 \Delta_2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -Q^*(t) + \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n (k_{ni} r) \cos n\theta}{k_{ni} N_{ni}^2 \operatorname{sh} \kappa_{ni}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \operatorname{ch} \kappa_{ni} \right) J_n (k_{ni} r) \cos n\theta \, r dr d\theta. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Здесь через $Q^*(t)$ обозначена неизвестная функция времени $\rho \left(\tilde{Q} - \dot{a}_0 \right)$.

Решение системы уравнений (11) будем искать в виде суммы статического и динамического прогибов.

Статическая составляющая W_l^{st} находится из краевой задачи

$$\begin{cases} D_1\Delta_2^2 W_1^{st} - T_1\Delta_2 W_1^{st} + \rho g W_1^{st} = -C - \rho g h, \\ D_2\Delta_2^2 W_2^{st} - T_2\Delta_2 W_2^{st} - \rho g W_2^{st} = C, \end{cases} \tag{12}$$

$$W_l^{st}\Big|_{r=0} < \infty, \quad \int_0^R\int_0^{2\pi} W_1^{st} r dr d\theta = \int_0^R\int_0^{2\pi} W_2^{st} r dr d\theta, \quad W_l^{st}\Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial W_l^{st}}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 0. \tag{13}$$

В монографии [5] в предположении, что жесткость пластин такова, что их статические прогибы малы, доказана разрешимость задачи (12) – (13) и приведено ее решение.

2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИСХОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В осесимметричном случае ($n = 0$) следующая из (11) задача на собственные колебания имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\chi_1\ddot{w}_1 + D_1\Delta_2\Delta_2 w_1 - T_1\Delta_2 w_1 + \rho g w_1 = -\frac{2\rho h}{R^2}\int_0^R w_1 r dr + Q^* + \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(k_i r)}{k_i N_i^2 \operatorname{sh}\kappa_i}\int_0^R\left(\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1 \operatorname{ch}\kappa_i\right) J_0(k_i r)\, r dr, \\ &\chi_2\ddot{w}_2 + D_2\Delta_2\Delta_2 w_2 - T_2\Delta_2 w_2 - \rho g w_2 = -Q^* + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(k_i r)}{k_i N_i^2 \operatorname{sh}\kappa_i}\int_0^R\left(\ddot{w}_1 - \ddot{w}_2 \operatorname{ch}\kappa_i\right) J_0(k_i r)\, r dr. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Здесь для краткости частные производные функций w_l по времени обозначены точками, а индекс n в обозначениях опускается.

Функция $Q^*(t)$ в (14) является неявной функцией прогибов и определяет давление в сосуде. Будем полагать

$$Q^*(t) = Qe^{i\omega t}, \tag{15}$$

После разделения переменных в (14) получим

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2^2 w_1 - p_1\Delta_2^2 w_1 - q_1 w_1 = q_0\int_0^R w_1 r dr - \sum_{i=1}^{\infty} b_{1i} J_0(k_i r)\int_0^R\left(w_2 - w_1 \operatorname{ch}\kappa_i\right) J_0(k_i r) r dr - \frac{\omega^2}{D_1}Q, \\ &\Delta_2^2 w_2 - p_2\Delta_2^2 w_2 - q_2 w_2 = -\sum_{i=1}^{\infty} b_{2i} J_0(k_i r)\int_0^R\left(w_1 - w_2 \operatorname{ch}\kappa_i\right) J_0(k_i r) r dr + \frac{\omega^2}{D_2}Q, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где

$$p_l = \frac{T_l}{D_l}, \qquad q_l = \frac{\chi_l\omega^2 + (-1)^l \rho g}{D_l},$$

$$q_0 = \frac{2\rho h\omega^2}{R^2 D_l}, \quad b_{li} = \frac{2\rho\omega^2}{R^2 D_l k_i \operatorname{sh}\kappa_i J_0^2(\mu_i)}.$$

Общее решение системы (16), ограниченное при $r = 0$, имеет вид

$$w_l = A_l J_0(\beta_{l1} r) + B_l I_0(\beta_{l2} r) + C_l + \sum_{i=1}^{\infty} K_{li} J_0(k_i r), \tag{17}$$

где A_l, B_l, C_l и K_{li} – некоторые константы,

$$\beta_{l1} = \sqrt{-\frac{p_l}{2} + \sqrt{\frac{p_l^2}{4} + q_l}}\,, \ \beta_{l2} = \sqrt{\frac{p_l}{2} + \sqrt{\frac{p_l^2}{4} + q_l}}\,.$$

Подставляя предполагаемую форму решения (17) в (16), можно получить следующее выражение для прогибов w_l

$$w_l = A_1 u_{l1}(r) + B_1 u_{l2}(r) + A_2 u_{l3}(r) + B_2 u_{l4}(r) + Q u_{l5}(r)\,. \tag{18}$$

Функции $u_{lm}(r)$ определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
&u_{11}(r) = J_0(\beta_{11} r) - \frac{2q_0 R}{(2q_1 + R^2 q_0)\beta_{11}} J_1(\beta_{11} R) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{D}_{1i} \tilde{\alpha}_{1i} J_0(k_i r),\\
&u_{12}(r) = I_0(\beta_{12} r) - \frac{2q_0 R}{(2q_1 + R^2 q_0)\beta_{12}} I_1(\beta_{12} R) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{D}_{1i} \tilde{\beta}_{1i} J_0(k_i r),\\
&u_{13}(r) = -\sum_{i=1}^{\infty} D_{1i}^{*} \tilde{\alpha}_{2i} J_0(k_i r), \qquad u_{14}(r) = -\sum_{i=1}^{\infty} D_{1i}^{*} \tilde{\beta}_{2i} J_0(k_i r),\\
&u_{21}(r) = -\sum_{i=1}^{\infty} D_{2i}^{*} \tilde{\alpha}_{1i} J_0(k_i r), \qquad u_{22}(r) = -\sum_{i=1}^{\infty} D_{2i}^{*} \tilde{\beta}_{1i} J_0(k_i r),\\
&u_{23}(r) = J_0(\beta_{21} r) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{D}_{2i} \tilde{\alpha}_{2i} J_0(k_i r), \quad u_{24}(r) = I_0(\beta_{22} r) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{D}_{2i} \tilde{\beta}_{2i} J_0(k_i r),\\
&u_{15}(r) = \frac{2\omega^2}{\left(2q_1 + R^2 q_0\right) D_1}, \qquad u_{25}(r) = -\frac{\omega^2{}_2}{q_2 D_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{D}_{li} = \frac{b_{li}\left(\lambda_{l+1i}\,\mathrm{ch}\,\kappa_i - \tilde{b}_{2i}\right)}{\Delta_i}, \qquad D_{li}^{*} = \frac{b_{li}\lambda_{l+1i}}{\Delta_i}, \quad \lambda_{li} = \left(k_i^2 + p_l\right)k_i^2 - q_l\,,$$

$$\tilde{b}_{2i} = \frac{\rho\omega^2}{k_i D_l}, \qquad \Delta_i = \tilde{b}_{1i}\tilde{b}_{2i} + \lambda_{1i}\lambda_{2i} - \left(\lambda_{1i}\tilde{b}_{2i} + \lambda_{2i}\tilde{b}_{1i}\right)\mathrm{cth}\,\kappa_i\,,$$

$$\tilde{\alpha}_{li} = -\frac{R^3 \beta_{l1} J_1(\beta_{l1} R) J_0(\mu_i)}{\mu_i^2 - (\beta_{l1} R)^2}\,, \ \tilde{\beta}_{li} = \frac{R^3 \beta_{l2} I_1(\beta_{l2} R) J_0(\mu_i)}{\mu_i^2 + (\beta_{l2} R)^2}\,.$$

Неизвестные константы A_1, B_1, A_2, B_2, Q в (18) можно найти из условий жесткой заделки пластин

$$w_l\big|_{r=R} = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial w_l}{\partial r}\right|_{r=R} = 0 \qquad (\,l = \overline{1,2}\,)$$

и условия (6). В этом случае для определения неизвестных констант получим однородную систему пяти линейных уравнений.

Из равенства нулю определителя этой системы следует частотное уравнение совместных колебаний жидкости и упругих оснований

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{20}$$

где

$$a_{lm} = u_{lm}(r)\big|_{r=R} \qquad (l = \overline{1,2}\,,\ \ m = \overline{1,5}),$$

$$c_{11} = \left.\frac{\partial u_{11}(r)}{\partial r}\right|_{r=R} = -\beta_{11} J_1(\beta_{11} R)\,, \qquad c_{12} = \left.\frac{\partial u_{12}(r)}{\partial r}\right|_{r=R} = \beta_{12} I_1(\beta_{12} R)\,,$$

$$c_{21} = \left.\frac{\partial u_{21}(r)}{\partial r}\right|_{r=R} = -\beta_{21} J_1(\beta_{21} R)\,, \qquad c_{22} = \left.\frac{\partial u_{22}(r)}{\partial r}\right|_{r=R} = \beta_{22} I_1(\beta_{22} R)\,,$$

$$d_1 = \frac{2q_1 R}{(2q_1 + R^2 q_0)\beta_{11}} J_1(\beta_{11} R)\,, \qquad d_2 = \frac{2q_1 R}{(2q_1 + R^2 q_0)\beta_{12}} I_1(\beta_{12} R)\,,$$

$$d_3 = \frac{R}{\beta_{21}} \cdot J_1(\beta_{21} R)\,, \quad d_4 = \frac{R}{\beta_{22}} \cdot I_1(\beta_{22} R)\,, \quad d_5 = \frac{\rho R^2 \omega^2}{2}\left(\frac{2}{2q_1 + q_0} + \frac{1}{q_2}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Петренко М.П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикл. механика. – 1969. – Т.5, № 6. – С. 44-50.
2. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Колебания упругой мембраны, разделяющей двухслойную жидкость в прямоугольном канале с упругим плоским дном// X Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» г. Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г. Т.2. Изд-во ООО «ЦВВР» Ростов-на-Дону, 2006.
3. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном // Динамические системы. – 2006. – Вып. 21. – С. 7–13.
4. Кононов Ю.Н., Шевченко В.П. О свободных колебаний упругих пластинок, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном // Вестник Донецкого университета. Серия А. – 2006. – №1. – С. 156–161.
5. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. – 416 с.