ДЕМПФИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ПОМОЩИ ПЬЕЗОАКТУАТОРОВ

В. Г. КАРНАУХОВ [1], Т. В. КАРНАУХОВА [2]

[1] *Институт механики, НАНУ, ул.Нестерова, 3, 03057,Киев,57, Украина*

[2] *НТТУ “КПИ“, проспект Победы, 37, 03056 ,Киев, Украина*

e–mail:Karn@inmech.kiev.ua

By the Bubnov–Galerkin method the problem of forced resonance vibrations and dissipative heating of flexible circular viscoelestic plate with distributed actuators is solved. The influence of geometrical nonlinearity and dissipative heating on effectiveness of active damping vibrations of the plate with a built–in edge by the piezoelectric actuators is studied.

ВВЕДЕНИЕ

Как конструктивные элементы, тонкие круглые пластины из пассивных (без пьезоэффекта) и активных вязкоупругих материалов широко используются в различных областях современной техники [1–3]. При действии на них гармонических во времени нагрузок с частотой, близкой к резонансной, возникает опасность их разрушения из-за усталости, высокого уровня напряжений, температуры диссипативного разогрева и др. В связи с этим возникает необходимость в демпфировании резонансных колебаний таких пластин. Для этой цели в последние годы эффективно используются активные методы [3–5], базирующиеся на включении в конструкцию пьезокомпонент, выполняющих функции сенсоров и актуаторов. Одним из основных методов активного демпфирования колебаний является метод, основанный на использовании пьезоэлектрических включений, выполняющих функции актуаторов. Главной задачей при использовании этого метода является расчет разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации действия механической нагрузки. При резонансных колебаниях, высоких уровнях механической нагрузки, а также при малых толщинах амплитуда колебаний может стать сравнимой с толщиной пластины. При этом возникает необходимость в учете геометрической нелинейности при исследовании активного демпфирования колебаний пластины. Обзор исследований по активному демпфированию колебаний круглых пластин представлен в статье [6], в которой рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях круглой пластины с актуаторами. В этой работе принимается предположение о равенстве нулю нормальной составляющей вектора индукции, что при наличии электродов на поверхностях пластины не отвечает действительности. Кроме того, в ней при рассмотрении жесткого защемлении торца рассматривается полное покрытие пьезослоя электродами, что не позволяет управлять колебаниями пластины. В этой работе не учитываются диссипативные свойства материалов и температура диссипативного разогрева.

В данной статье рассматривается задача о вынужденных изгибных колебаниях жестко защемленной круглой пассивной вязкоупругой пластины, на поверхности которой нанесены одинаковые пьезослои, отличающиеся лишь направлением поляризации. Пластина нагружена равномерным поверхностным давлением, изменяющимся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной. Задача решается в одномодовом приближении методом Бубнова–Галеркина в сочетании с методом гармонического баланса. Выведена формула для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки. Получено решение уравнения энергии для температуры диссипативного разогрева. Используя его, определено критическое значение параметра механического нагружения, после превышения которого температура диссипативного разогрева достигает точки Кюри и пьезоэлементы перестают выполнять свое функциональное назначение, так что имеет место специфический тип теплового разрушения. Исследовано влияние геометрической нелинейности на амплитудно–, температурно–частотные характеристики, на компенсирующую механическую нагрузку разность потенциалов и на критическое значение этой нагрузки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сплошную круглую пластину радиуса a и толщиной h_0 из пассивного вязкоупругого материала. На ее внешних поверхностях размещены трансверсально–изотропные пьезоэлектрические слои толщиной h_1, отличающиеся друг от друга лишь направлением поляризации. На пластину действует изменяющееся по гармоническому закону давление $p = p_0 \cos \omega t$. Нанесенные на пьезослои бесконечно тонкие электроды – коротко замкнуты. Для описания электромеханического состояния пластины используются гипотезы Кирхгоффа–Лява и дополнительные гипотезы относительно электрических полевых величин [1–3]. Интегрируя упрощенные согласно этим гипотезам уравнения состояния для пассивного и пьезоактивных слоев, получим уравнения состояния для усилий и моментов [1–3]

$$N_r = D_N * (\varepsilon_r + \nu_N \varepsilon_\theta), \quad N_\theta = D_N * (\varepsilon_\theta + \nu_N \varepsilon_r), \tag{1}$$

$$M_r = D_M * (\kappa_r + \nu_M \kappa_\theta) + M_0, \quad M_\theta = D_M * (\kappa_\theta + \nu_M \kappa_r) + M_0. \tag{2}$$

Здесь использованы обозначения [2,3]:

$$M_0 = \frac{1}{2}\gamma_{31}\left(h_1 + h_0\right)V_A \quad D * f = D^0[1 - \int\limits_{-\infty}^{t} D_1(t-\tau) f(\tau) d\tau] = D^0 \bar{D} * f. \tag{3}$$

По аналогии с изложенным в [6] введем безразмерные величины

$$\hat{\hat{w}} = w / h, \quad r = a\rho, \quad D_{11}^0 = D_M^0 / (E_0 h^3), \quad \hat{\Phi} = \frac{a}{E_0 h^3}\Phi,$$

$$\hat{M}_0 = \frac{a^2 M_0}{E_0 h^4}, \quad \tau = \sqrt{E_0 h^3 / (\tilde{\rho} a^4)} t, A_{11}^0 = \frac{E_0 h}{D_N^0 (1 - \nu_N^2)}, q = pa^4 / (E_0 h^4). \tag{4}$$

При учете геометрической нелинейности нелинейные уравнения движения и совместности деформаций [7] дают следующую безразмерную нелинейную систему интегро–дифференциальных уравнений и граничных условий для перемещения и функции усилий $\hat{w}, \hat{\Phi}$:

$$D_{11}^0 \vec{D}_M * \Delta\Delta w - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\Phi \frac{\partial w}{\partial \rho}) - q - \Delta M_0 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

$$A_{11}^0 [\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}) - \frac{\Phi}{\rho}] = -\frac{1}{2}\bar{D}_N * \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^2 . \tag{6}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \tag{7}$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \nu_N \frac{1}{\rho} \Phi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем скобка над буквами опускается. Граничные условия (8) и (9) для функции усилий отвечают следующим условиям $N_r = 0$ и $u = 0$ при $r = a$.

ВЫВОД ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В дальнейшем ограничимся исследованием вынужденных гармонических колебаний круглой пластины по наиболее энергоемкой первой моде. Решение задачи будем искать методом Бубнова–Галеркина [8]. Для этой цели поперечный прогиб, резонансные составляющие механической и электрической нагрузок представим в виде:

$$w = \eta(\tau)(1-\rho^2)^2 \quad q = q_1(\tau)(1-\rho^2)^2, \quad \Delta M_0 = M_1(\tau)(1-\rho^2)^2. \tag{10}$$

Подставляя первое из выражений (10) в правую часть (6) и интегрируя полученное неоднородное дифференциальное уравнение с известной правой частью, найдем выражение для функции усилий Φ:

$$\Phi = \Phi_1 \rho^3 + \Phi_2 \rho^5 + \Phi_3 \rho^7 + \Phi_4 \rho, \tag{11}$$

где

$$\Phi_1 = -\frac{4}{4A_{11}^0}\phi(\tau), \quad \Phi_2 = \frac{2}{3A_{11}^0}\phi(\tau), \quad \Phi_3 = -\frac{4}{6A_{11}^0}\phi(\tau), \quad \phi(\tau) = \bar{D}_N * \eta^2(\tau). \tag{12}$$

Для граничных условий (8)

$$\Phi_4 = 11 / \left(6A_{11}^0\right), \tag{13}$$

а для граничных условий (9)

$$\Phi_4 = (7 - \nu_N) / [2A_{11}^0(1-\nu_N)]. \tag{14}$$

С использованием (10) и (11) находим

$$\Phi \frac{\partial w}{\partial \rho} = \sum_{k=1}^{5} \phi_{2k} \rho^{2k}, \quad \phi_{2k} = \gamma_{2k} \psi(\tau), \quad \psi(\tau) = \eta \bar{D}_N * \eta^2, \tag{15}$$

где

$$\gamma_2 = -4d_1, \quad \gamma_4 = (2_2 d_1 - \frac{4}{A_{11}^0}), \quad \gamma_6 = \frac{20}{3A_{11}^0}, \quad \gamma_8 = -\frac{10}{3A_{11}^0}, \quad \gamma_{10} = -\frac{2}{3A_{11}^0}. \tag{16}$$

Здесь для граничных условий (8), (9) соответственно имеем

$$d_1 = \frac{1}{A_{11}^0(5+\nu_N)^2}\left[(3+\nu_M)^2 - \frac{2}{3}(1+\nu_M)(3+\nu_M) + \frac{1}{6}(1+\nu_M)^2\right],$$

$$d_1 = \frac{1}{A_{11}^0(1+\nu_M)(5+\nu_N)^2}[(3-\nu_M)(3+\nu_M)^2 - \frac{2}{3}(1+\nu_M)(3+\nu_M)(5-\nu_M) + \frac{1}{6}(1\text{-}\nu_{\text{M}})\,(1+\nu_{\text{M}})^2.$$

Зная $\Phi \cdot \partial w / \partial \rho$, методом Бубнова-Галеркина решаем уравнение (5). В результате приходим к следующему интегро-дифференциальном уравнению относительно $\eta(\tau)$:

$$m\ddot{\eta} + \mu_1 \bar{D}_M * \eta - \mu_2 \eta \bar{D}_N * \eta^2 = Q\,. \tag{17}$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta_2 = \frac{7+\nu_M}{3(5+\nu_M)}, \quad \beta_4 = \frac{9+\nu_M}{6(5+\nu_M)}, \quad \beta_6 = \frac{11+\nu_M}{10(5+\nu_M)},$$
$$\beta_8 = \frac{13+\nu_M}{15(5+\nu_M)}, \quad \beta_{10} = \frac{15+\nu_M}{21(5+\nu_M)}, \quad m = \frac{1}{5}, \tag{18}$$
$$\mu_1 = \frac{32}{3} D_{11}^0, \quad \mu_2 = \sum_{k=1}^{5} \beta_{2k}\gamma_{2k}, \quad Q = \frac{1}{6} q - 4M_0\left(\rho_1^2 - \rho_1^4\right).$$

При вычислении Q учитывалось, что функция $M_0(\rho) = M_0\left[H(\rho) - H(\rho-\rho_1)\right]$. В результате дифференцирования этой функции в уравнении движения появляются дельта–функции и их первые производные.

Нелинейное интегро–дифференциальное уравнение (17) дает возможность исследовать вынужденные резонансные колебания вязкоупругой гибкой круглой пластины при действии на нее механической и электрической нагрузки и найти ту разность потенциалов, которая необходима для компенсации механической нагрузки.

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА [9]

Как и в [10] полагалось, что

$$q = q'\cos\omega t - q''\sin\omega t, \quad M_0 = M'\cos\omega t - M''\sin\omega t, \tag{19}$$

где частота механической и электрической нагрузки близка к резонансной частоте упругой пластины, определяемой из соотношения

$$\omega = \sqrt{\mu_1 / m}. \tag{20}$$

В соответствии с методом гармонического баланса полагаем

$$\eta = \eta'\cos\omega\tau - \eta''\sin\omega\tau \tag{21}$$

и из уравнения (17) получаем систему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно η', η'':

$$-m\omega^2\eta' + \mu_1(D'\eta' - D''\eta''') - f_1 = Q', \qquad -m\omega^2\eta'' + \mu_1(D''\eta' + D'\eta''') - f_2 = Q'', \tag{22}$$

где

$$f_1 = \mu_2\left[\tfrac{1}{2}(1-D_\infty)\eta' + \frac{1}{4}(1-D_C)\eta' - \frac{1}{4}D_S\eta''\right]\left|\eta\right|^2,$$
$$f_{21} = \mu_2\left[\tfrac{1}{2}(1-D_\infty)\eta'' + \frac{1}{4}(1-D_C)\eta'' - \frac{1}{4}D_S\eta'\right]\left|\eta\right|^2. \tag{23}$$

Здесь $1-D_\infty$ ($D_\infty = \int_0^\infty D_1(z)dz$) – безразмерный длительный модуль; $D_{11}^0(1-D_C), D_{11}^0 D_S$ – комплексные характеристики пассивного вязкоупругого материала, отвечающие удвоенной частоте электромеханической нагрузки; $D' = D'_M$, $D'' = D''_M$ – комплексные характеристики пассивного вязкоупругого материала, отвечающие частоте электромеханической нагрузки; $|\eta|^2$ – квадрат амплитуды колебаний.

Из уравнений (22), (23) легко получить кубическое уравнение для квадрата амплитуды $x = |\eta|^2$ (амплитудно-частотную характеристику – АЧХ):

$$\left(a_{12}^2 + a_{21}^2\right)x^3 + 2\left(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}\right)x^2 + \left(a_{11}^2 + a_{21}^2\right)x - [Q] = 0, \tag{24}$$

где $a_{11} = -m\omega^2 + \mu_1 D', a_{12} = \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1 - D_\infty) + \frac{1}{4}(1 - D_C) \right], a_{21} = \mu_1 D'', a_{22} = \frac{\mu_2}{4} D_S$.

Уравнение (24) можно упростить, считая влияние геометрической нелинейности и вязкости величинами одного порядка малости. При этом в (24) следует положить $D_\infty = D_S = D_C = 0$.

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРЫ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА

Как и в [10], для расчета температуры диссипативного разогрева принимаем указанную выше гипотезу о малости влияния геометрической нелинейности и вязкости. При этом установившаяся (максимальная) температура диссипативного разогрева находится из решения уравнения энергии

$$\frac{\tilde{\lambda}}{a^2} \Delta\theta - \alpha\theta + Ax(d_0 + d_2\rho^2 + d_4\rho^4) = 0\,. \tag{25}$$

Здесь $\tilde{\lambda}$ – приведенный коэффициент теплопроводности трехслойной пластины, α – коэффициент, характеризующий теплообмена с внешней средой [10],

$$A = 4\omega D'', d_0 = 4(1 + \nu_M), d_2 = -16(1 + \nu_M), d_4 = (20 + 12\nu_M).$$

Пусть на торце пластины $\rho = 1$ задана постоянная температура. Решение задачи получим методом Бубнова–Галеркина, полагая

$$\theta = \theta_0(1 - \rho^2). \tag{26}$$

Применяя к (25) процедуру Бубнова–Галеркина, получим решение

$$\theta_0 = Bx\left(\frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{12}d_4\right) / [1 + \beta / 6], \quad \beta = \frac{a^2\alpha}{\tilde{\lambda}}, \quad B = \frac{a^2 A}{\tilde{\lambda}}. \tag{27}$$

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализ решения нелинейного алгебраического уравнения (24) показывает, что, как и для случая прямоугольной пластины [10], при механическом и электрическом нагружении амплитудно–частотная характеристика будет неоднозначной и жесткой $(\mu_2 \prec 0)$. Приравнивая в уравнении (24) электромеханическую нагрузку нулю, получим выражение для разности потенциалов, компенсирующей механическую нагрузку:

$$V_A = q / [12\gamma_{31}\left(h_1 + h_0\right)\left(\rho_1^2 - \rho_1^4\right)]. \tag{28}$$

При подводе к актуатору разности потенциалов (28) амплитуда вынужденных колебаний становится равной нулю, так что пластина не будет совершать поперечных колебаний. Из этой формулы также следует очень важный результат: при резонансных колебаниях в одномодовом приближении геометрическая нелинейность не влияет на величину разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки. Этот результат позволяет при расчете указанной разности потенциалов не решать сложных нелинейных задач, а ограничиться решением линейной задачи о резонансных колебаниях пластины.

Второй важный результат, ккоторый следует из формулы (28), состоит в том, что работа актуатора будет наиболее эффективной (к актуатору будет подведена минимальная разность потенциалов), если размер актуатора $\rho_1 = \sqrt{2} / 2$.

Третий важный результат также следует из анализа формулы (28). Максимальная температура диссипативного разогрева достигается в центре пластины. При достижении температурой точки Кюри θ_K коэффициент электромеханической связи становится равным нулю. При этом из формулы (28) следует, что $V_a = \infty$ и пьезоактуатор перестает выполнять свое функциональное назначение. Приравнивая выражение (28) точке Кюри θ_K, получим то значение амплитуды вынужденных механических колебаний x_K, при котором активный материал теряет пьезоэффект и становится пассивным:

$$x_K = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_1 = \theta_K(1+\frac{\beta}{6}), \quad x_2 = B\left(\frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{12}d_4\right). \tag{29}$$

При этом имеет место специфический тип теплового разрушения, когда пластина не разделяется на части, но пьезоматериал теряет свое функциональное назначение, связанное с реализацией активного демпфирования колебаний. Для определения того максимального давления $q_{\max}$, при котором будет иметь место этот тип разрушения, подставим выражение для механической нагрузки $Q = q/6$ в уравнение (29):

$$q_{\max} = \left\{6\left[\left(a_{12}^2 + a_{21}^2\right)(\frac{x_1}{x_2})^3 + 2\left(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}\right)(\frac{x_1}{x_2})^2 + \left(a_{11}^2 + a_{21}^2\right)(\frac{x_1}{x_2})\right]\right\}^{1/2} \tag{30}$$

В силу соотношения (27) температурно–частотная характеристика также будет неоднозначной и жесткой, так как она отличается от квадрата амплитуды колебаний только постоянным множителем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. – Т.5. – Киев: Наук. думка, 1989. – 290 с.
2. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. – Т.4. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с.
3. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖТТУ, 2005. –428с.
4. *Gabbert U. and Tzou H.S.* Smart Structures and Structronic Systems.- Kluver Academic Pub.: Dordrecht/Boston/ London. – 2001. – 384p.
5. *Tzou H.S., Bergman L.A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 400p.
6. *Santosh Kapuria, Dumir P.C.* Geometrically nonlinear axisymmetric response of thin circular plate piezoelectric actuation//Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2005. – Vol. 10. – P. 411– 423.
7. *Григоренко Я.М., Мукоєд А.П.* Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – К. : Либідь. 1992. – 152 с.
8. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. – М: Мир, 1988. – 352с.
9. *Митропольский Ю.А.* Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К.: Ин–т математики НАНУ, 1997. – 344с.
10. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В.* Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами// Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – В. 8. – С.48–68.