

ОДНОЧАСТОТНЕ НАБЛИЖЕННЯ В ЗАДАЧАХ АКТИВНОГО ДЕМПФІРУВАННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ШАРІРНО ОПЕРТОЇ БАЛКИ З П’ЄЗОАКТИВНИМИ ШАРАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ФІЗИЧНОЇ І ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ

Я. О. ЖУК, І. К. СЕНЧЕНКОВ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
Україна, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,
e-mail: y_zhuk@inmech.kiev.ua*

An approximate formulation for the problem in terms of the amplitudes of the main electromechanical field variables is produced by applying the monoharmonic (single-frequency) approach along with the concept of complex moduli to characterize the cyclic properties of the material. Accuracy of the approximate approach is estimated for the particular case of the monoharmonic mechanical and electric excitation of the three-layer beam. It is achieved through the comparison of the results computed for the transient response of the beam using the complete model with those found using the approximate model. Limitations on the approximate monoharmonic method application are specified. The effect of the physically nonlinear behaviour of the passive layer on the beam response is analysed.

ВСТУП

Сучасний підхід до розв’язання проблеми керування коливаннями тонкостінних конструкцій і їх елементів полягає у застосуванні методів активного контролю. Вплив здійснюється за допомогою введення додаткових активних елементів у конструкцію з метою досягнення бажаного результату шляхом їх реакції на відповідні зміни зовнішніх фізичних полів. Зокрема розподілені п’єзоелектричні актуатори/сенсори привертають значну увагу дослідників через свою потенціальну застосовність для контролю коливань в різноманітних прикладних і теоретичних областях. Інтегровані у конструкцію актуатори з п’єзоелектричних матеріалів можуть генерувати додаткові керуючі зусилля і моменти всередині конструкції згідно з прикладеною різницею електричних потенціалів. В свою чергу, наявний в конструкції напружено-деформований стан викликає на сенсорі виникнення відповідного сигналу, який може подаватись на аналізатор, або бути включеним у коло зворотного зв’язку.

По цій тематиці опубліковано дуже багато робіт. Корисні посилання можна знайти зокрема в оглядах [1,2]. Як правило, матеріали шарів вважаються пружними або в’язкопружними [3,4]. Проте в деяких випадках, зокрема при контролі інтенсивних коливань металічних елементів або при достатньо великих прогинах у тонкостінних елементах, необхідно враховувати складнішу непружну реакцію матеріалу і геометричну нелінійність. При цьому пряме інтегрування системи суттєво нелінійних рівнянь є надзвичайно громіздким і вимагає значних витрат машинного часу, особливо у випадку багатоциклових процесів при гармонічному навантаженні.

Проте для частинного випадку гармонічного навантаження була розвинута наближена методика розв’язання задач електромеханіки для стадії стаціонарних коливань [5,6]. При цьому використовувався той факт, що для циклічно стабільних матеріалів після деякого перехідного етапу в системі встановлювався коливальний режим на частоті зовнішнього збудження. Методика одночастотного наближення ґрунтується на використанні модифікованого методу еквівалентної лінеаризації і концепції комплексних модулів [5,6].

В даній статті зв’язана електромеханічна поведінка шаруватої балки, яка містить

пружні п'єзоактивні шари і фізично нелінійні електрично пасивні шари, досліджується в повній і наближеній одночастотній постановці при гармонічному механічному або електричному навантаженні. Розглядається модельна задача про вимушені коливання шарнірно опертої тришарової балки, середній шар якої виготовлений з алюмінієвого сплаву, а зовнішні – з п'єзокераміки. Досліджуються особливості впливу фізичної і геометричної нелінійностей на реакцію конструкції, визначаються точність і межі застосовності наближеного підходу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядаються вимушені коливання шарнірно опертої тришарової балки, середній шар якої виготовлений з алюмінієвого сплаву АМг-6, а зовнішні – з п'єзокераміки ЦТС-19. Товщини шарів сталі. У розгляд вводиться прямокутна декартова система координат $Oxyz$ таким чином, щоб вісь абсцис співпадала з віссю балки, товщинна координата відраховується вздовж осі ординат, а ширина – вздовж осі аплікату. Геометричні параметри балки: довжина – L , товщина – H_s , ширина – b_y . Товщини індивідуальних шарів h_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Електричні потенціали φ_{zi} визначені на електродованих поверхнях п'єзоактивних шарів.

Повна постановка задачі, розвинута з використанням моделі Боднера-Партома для описання непружної поведінки матеріалу електрично пасивного шару, детально описана в [7,8]. Вона ґрунтується на концепції внутрішніх параметрів стану. При цьому приймається припущення про адитивність деформації. Модель містить рівняння закону Гука для пружних складових деформації, закон течії типу Прандтля-Рейса з умовою пластичної нестисливості, кінетичне рівняння, еволюційні рівняння для внутрішніх змінних ізотропного і кінематичного зміцнення, а також початкові умови для внутрішніх параметрів стану. П'єзокерамічні шари вважаються пружними трансверсально ізотропними.

Ця нестационарна постановка отримана на основі співвідношень електромеханіки для тонкостінних елементів в припущенні справедливості стандартних гіпотез Кірхгофа-Лява, узагальнених на випадок електромеханіки і плоского напруженого стану [7,8]. Вона також містить рівняння руху тонкостінних оболонок і відповідні граничні і початкові умови.

Постановка задачі в одночастотному наближенні розвинута в [5]. Коротко наведемо її тут. Використання концепції комплексних модулів приводить до визначальних рівнянь для п'єзоактивних шарів у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \tilde{c}_{11}^D \tilde{\varepsilon}_x + \tilde{c}_{12}^D \tilde{\varepsilon}_y + \tilde{c}_{13}^D \tilde{\varepsilon}_z - \tilde{h}_{31} \tilde{D}_z, & \sigma_{xy} &= (\tilde{c}_{11}^D - \tilde{c}_{12}^D) \tilde{\varepsilon}_{xy} / 2, \\ \sigma_y &= \tilde{c}_{12}^D \tilde{\varepsilon}_x + \tilde{c}_{11}^D \tilde{\varepsilon}_y + \tilde{c}_{13}^D \tilde{\varepsilon}_z - \tilde{h}_{31} \tilde{D}_z, & \sigma_{yz} &= \tilde{c}_{44}^D \tilde{\varepsilon}_{yz} - \tilde{h}_{15} \tilde{D}_y, \\ \sigma_z &= \tilde{c}_{13}^D \tilde{\varepsilon}_x + \tilde{c}_{12}^D \tilde{\varepsilon}_y + \tilde{c}_{33}^D \tilde{\varepsilon}_z - \tilde{h}_{33} \tilde{D}_z, & \sigma_{xz} &= \tilde{c}_{44}^D \tilde{\varepsilon}_{xz} - \tilde{h}_{15} \tilde{D}_x, \\ \tilde{E}_x &= -\tilde{h}_{15} \tilde{\varepsilon}_{xz} + \tilde{\beta}_{11}^s \tilde{D}_x, & \tilde{E}_y &= -\tilde{h}_{15} \tilde{\varepsilon}_{yz} + \tilde{\beta}_{11}^s \tilde{D}_y, \\ \tilde{E}_z &= -\tilde{h}_{31} (\tilde{\varepsilon}_x + \tilde{\varepsilon}_y) - \tilde{h}_{33} \tilde{\varepsilon}_z + \tilde{\beta}_{33}^s \tilde{D}_z, \end{aligned}$$

де використані стандартні позначення для механічних і електричних величин [9]. Хвилею зверху позначені комплексні величини.

Використання стандартних гіпотез Кірхгофа-Лява, узагальнених на випадок електромеханіки і плоского напруженого стану, приводить до наступних визначальних співвідношень для кожного п'єзоактивного шару

$$\tilde{\sigma}_x = \tilde{C}_{11}\tilde{\varepsilon}_x - p\tilde{H}_{31}\tilde{D}_z, \quad \tilde{E}_z = -p\tilde{H}_{31}\tilde{\varepsilon}_x + \tilde{B}_{33}^s\tilde{D}_z, \quad (1)$$

де вирази для комплексних модулів наведені в [5], а коефіцієнт p , дорівнює 1 при співпадінні вектора поперечної поляризації матеріалу з додатним напрямком осі Oz і дорівнює -1 в протилежному випадку.

Класичний варіант методу одночастотного наближення (на відміну від повної постановки нестационарної задачі) не дозволяє досліджувати геометрично нелінійну постановку. Тому тут використовується геометрично лінійний варіант теорії, а шляхом порівнянням з повним розв’язком досліджуються межі застосовності наближеного одночастотного варіанту теорії.

Використовуючи комплексні позначення для переміщень \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} , деформації $\tilde{\varepsilon}_{xx}$; деформації і кривизни осі балки $\tilde{\varepsilon}$ і $\tilde{\kappa}$, шляхом інтегрування співвідношення з (1) по товщині кожного окремого шару дозволяє в остаточному вигляді отримати фізичні співвідношення в комплексній формі

$$\tilde{N}_x = \tilde{C}_1\tilde{\varepsilon} + \tilde{K}_1\tilde{\kappa} - \tilde{N}_E, \quad \tilde{M}_x = \tilde{K}_1\tilde{\varepsilon} + \tilde{D}_1\tilde{\kappa} - \tilde{M}_E. \quad (2)$$

Вирази для коефіцієнтів $\tilde{C}_1^{(s)}$, $\tilde{K}_1^{(s)}$ і $\tilde{D}_1^{(s)}$ для пасивних і активних шарів отримані в [5].

Один із шарів балки вважається нерухомим, тому осьове зусилля дорівнює нулю в нашому випадку. Рівняння наближеної постановки задачі для балки в остаточному вигляді набувають вигляду

$$\tilde{w}_{,x} = -\tilde{\mathcal{F}}, \quad \tilde{M}_{,x} = \tilde{Q}, \quad \tilde{Q}_{,x} + \bar{\rho}\omega^2 h\tilde{w} = 0, \quad \tilde{\mathcal{F}}_{,x} = \tilde{Q}_S(\tilde{M} + \tilde{M}_E), \quad (3)$$

де $\tilde{Q}_S = \tilde{C}_1 / (\tilde{C}_1\tilde{D}_1 - \tilde{K}_1^2)$, $\bar{\rho} = H_s^{-1} \sum_s \int_{z_j}^{z_{j+1}} \rho_j dz$, $j = 1, 2, 3$.

Постановка замикається заданням відповідних граничних умов. Розглядаються два типи навантаження на балку. Згідно з першим з них (механічним) балка навантажується моментами на кінцях $x = 0, L$, які змінюються за гармонічним законом в часі $M = M_0 \sin \omega t$, де M_0 – амплітуда і ω – частота зовнішнього навантаження. Другий тип навантаження (електричний) зводиться до варіювання за гармонічним законом в часі різниці електричних потенціалів на контактах п’єзоелектричних шарів: $V^{(s)} = V_0^{(s)} \sin \omega t$, де $V_0^{(s)}$ – амплітуда електричних напружень на s -ому шарі.

Граничні умови для випадку механічного навантаження мають вигляд

$$w = 0, \quad M = M_0 \sin \omega t; \quad x = 0, L, \quad (4)$$

а для електричного навантаження

$$w = 0, \quad M = 0; \quad x = 0, L \quad (5)$$

при цьому збудження передається в систему за допомогою електрично індукованих моментів M_E .

Відповідні (7) і (8) граничні умови у комплексному вигляді мають форму

$$\tilde{w} = 0, \quad \tilde{M} = \tilde{M}_0 \text{ при } x = 0, L; \quad (6)$$

$$\tilde{w} = 0, \quad \tilde{M} = 0 \text{ при } x = 0, L. \quad (7)$$

Додаючи (6) і (7) до рівнянь (3), замикаємо наближену постановку задачі.

Обидві постановки задачі і повна, і наближена – суттєво нелінійні й розв’язуються чисельно. Методики розв’язання детально викладені в роботах [7,8] і [5] відповідно.

ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛУ

Фізико-механічні властивості матеріалів, використаних в даній статті як матеріал активних шарів і пасивного шару (АМГ-6), при розрахунках в рамках повної постановки вибрані наступними:

$$\text{ЦТС-19: } \rho = 7300 \text{ кг/м}^3, c_{11}^D = 1,12 \cdot 10^5 \text{ МПа}, c_{12}^D = 0,64 \cdot 10^5 \text{ МПа}, c_{13}^D = 0,5 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ c_{33}^D = 1,25 \cdot 10^5 \text{ МПа}, h_{31} = -5,0 \cdot 10^8 \text{ В/м}, h_{33} = 1,8 \cdot 10^9 \text{ МПа}, \beta_{33}^S = 1,33 \cdot 10^8 \text{ м/Ф};$$

$$\text{АМГ-6: } \rho = 2692,65 \text{ кг/м}^3, E = 0,816 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,34, D_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}, n = 2,06,$$

$$m_1 = 0,182 \text{ МПа}^{-1}, m_2 = 3,7 \text{ МПа}^{-1}, K_0 = 323,6 \text{ МПа}, K_1 = 647,4 \text{ МПа}, D_1 = 80 \text{ МПа}.$$

При розрахунках вважалось, що п'єзоелектрик завжди демонструє пружну поведінку, тому в рамках наближеної постановки задачі модулі накопичення вибирались рівними модулям, наведеним вище, а модулі втрат – рівними нулю:

$$c_{11}^{D'} = c_{11}^D, c_{11}^{D''} = 0; c_{12}^{D'} = c_{12}^D, c_{12}^{D''} = 0; c_{13}^{D'} = c_{13}^D, c_{13}^{D''} = 0; c_{33}^{D'} = c_{33}^D, c_{33}^{D''} = 0;$$

$$h'_{31} = h_{31}, h''_{31} = 0; h'_{33} = h_{33}, h''_{33} = 0; \beta_{33}^{S'} = \beta_{33}^S, \beta_{33}^{S''} = 0.$$

Комплексні модулі алюмінієвого сплаву, обчислені для інтервалу частот 1–100 Гц, взяті з роботи [5]. Розрахунки показали, що комплексні модулі демонструють слабку залежність від частоти.

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

Розрахунки проводились для модельної задачі про вимушені коливання шарнірно закріпленої тришарової балки, яка складається з центрального алюмінієвого і двох п'єзоактивних шарів. Товщини п'єзоактивних шарів дорівнюють $h_1 = h_3$, повна товщина балки $h = H_s = h_1 + h_2 + h_3$, де h_2 – товщина алюмінієвого шару. Довжина балки $L = 2$ м, товщина $h = 0,6 \cdot 10^{-1}$ м, ширина балки $b_y = 0,3 \cdot 10^{-1}$ м, товщини шарів $h_1 = h_3 = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м, $h_2 = 0,56 \cdot 10^{-1}$ м.

Відзначимо, що для запобігання утворенню середньої складової прогину внаслідок непружного деформування протягом першої чверті періоду і для механічного, і для електричного навантажень моменти, прикладені на кінцях балки, і різниця електричних потенціалів, які подаються на електроди п'єзошарів, на початковій стадії змінюються за гармонічним законом, модульованим лінійною функцією так, щоб задана амплітуда навантаження досягалась за 50 циклів коливань. У такий спосіб забезпечується симетричність прогинів балки відносно горизонтальної осі.

Типові історії зміни прогину і амплітуди напруження в точці A ($x = 1$ м, $z = -0,28 \cdot 10^{-1}$ м) для $M_0 = 7$ кН при частоті $f = 10$ Гц показані на рис. 1 і 2 відповідно. Побудовані аналогічні залежності для повних і непружних деформацій в точці A і електричного струму, який знімається з контактів п'єзоактивного шару, як для механічного, так і для електричного збудження. При розглянутій схемі навантаження і граничних умовах для балки механічне і електричне навантаження виявились еквівалентними в тому розумінні, що вони забезпечують однакові прогини і рівні значення основних механічних і електричних величин. Тому далі графіки представлені тільки для випадку механічного збудження.

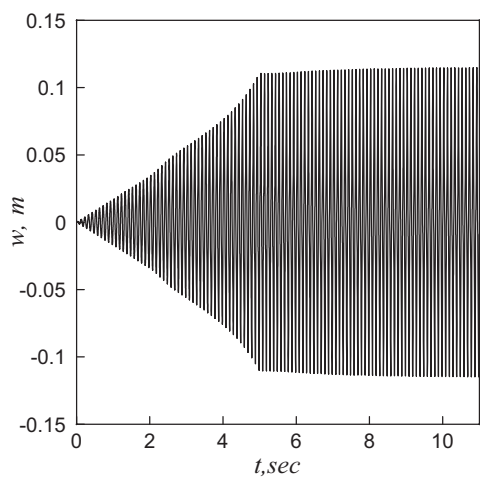


Рис. 1

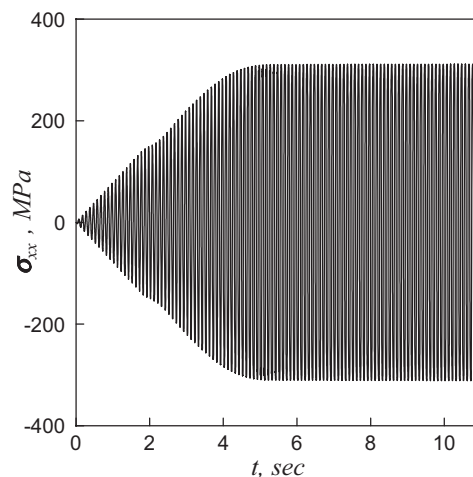


Рис. 2

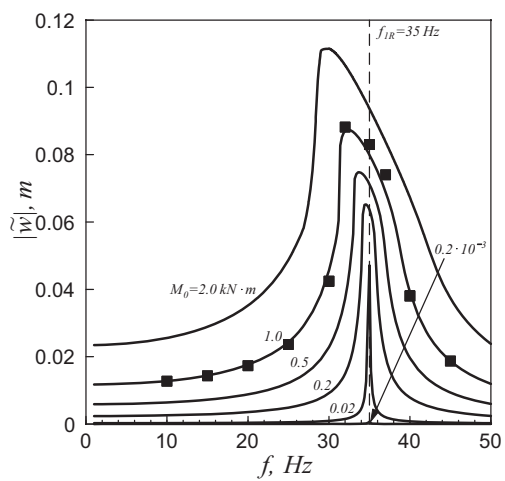


Рис. 3

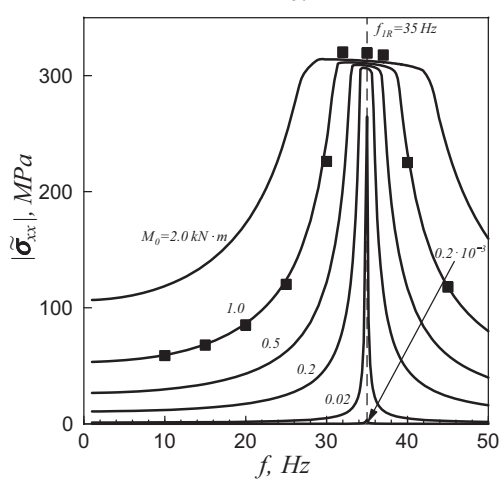


Рис. 4

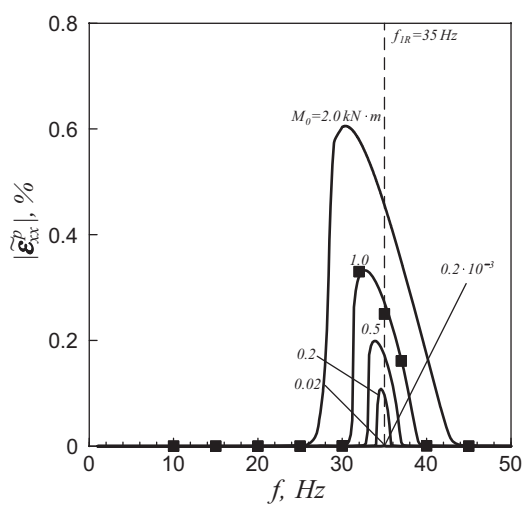


Рис. 5

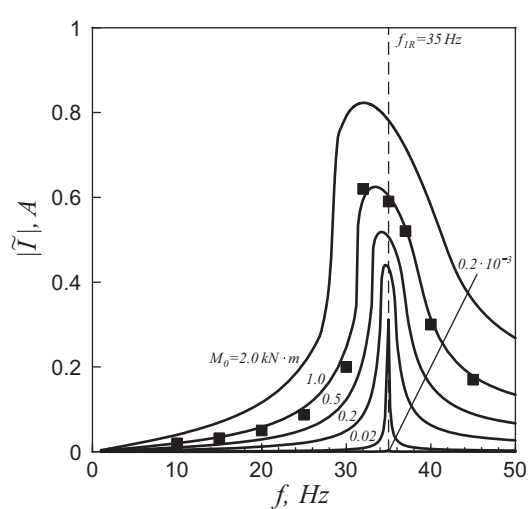


Рис. 6

Амплітудно-частотні характеристики прогину, напруження, непружної деформації в точці A і струму з п'єзошару представлені на рис. 3–6 відповідно для декількох значень параметру навантаження M_0 . Стационарні амплітуди, отримані при розв'язанні задачі в повній нестационарній постановці, показані маркерами. Відзначається добре узгодження результатів. Аналогічна картина спостерігається і для просторових розподілів амплітуд основних механічних характеристик.

Результати дослідження застосовності методу одночастотного наближення для широкого інтервалу значень параметру навантаження показали, що наближена теорія добре описує поведінку балки в тих випадках, коли, вплив геометричної нелінійності малий.

Еквівалентність механічного і електричного збуджень є основою для використання методу активного гасіння механічно збуджуваних коливань шляхом подачі гармонічно змінюваної в часі різниці електричних потенціалів, що подаються на електроди п'єзошарів. Оскільки залежність $V_0 \sim M_0$ виявилась лінійною навіть в області непружного деформування, то використовуючи наближену теорію можна просто знайти відповідне демпфуюче значення амплітуди електричного напруження і зсув фаз, який забезпечує практично повне гасіння коливань.

Таким чином, метод моногармонічного наближення виявився потужним і надійним способом визначення амплітуд вимушених коливань електромеханічних систем при механічному або електричному навантаженні навіть для суттєвих рівнів збудження. У випадку малого впливу геометричної нелінійності метод дозволяє отримувати результати з високою точністю. Він є надзвичайно ефективним з точки зору витрат машинного часу при хорошій для інженерної практики точності розрахунків.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Tani J., Takagi T. and Qui, J.* Intelligent material systems: Application of functional materials // *Appl. Mech. Rev.* – 1998. – v. 51. – P. 505-521.
2. *Rao S.S. and Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – v.47. – P. 113-123.
3. *Blanguernon A., Lene, F. and Bernadou, M.* Active control of a beam using a piezoceramic element // *Smart Mater. Struct.* – 1999. – v. 8. – P. 116-124.
4. *Liu G.R., Peng X.Q., Lam K.Y. and Tani, J.* Vibration control simulation of laminated composite plates with integrated piezoelectrics // *J. Sound Vibr.* – 1999. – v. 220. – P. 827-846.
5. *Жук Я.А., Сенченков И.К.* Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // *Прикл. механика.* – 2004. – т. 40, № 5. – С. 80–91.
6. *Сенченков И.К., Жук Я.А., Карнаухов В.Г.* Моделирование термомеханического поведения физически нелинейных материалов при моногармоническом нагружении // *Прикладная механика* – 2004. – т. 40, № 9. – С. 3–34.
7. *Жук Я.А., Гузь И.А.* Активное демпфирование вынужденных колебаний шарнирно опертой балки, содержащей пьезоактивные слои, при учете геометрической и физической нелинейностей // *Прикл. механика.* – 2009. – т. 45, № 1. – С. 118–136.
8. *Жук Я.А., Гузь И.А.* Влияние геометрической и физической нелинейностей на вынужденные колебания шарнирно опертой балки, содержащей пьезоактивные слои // *Теор. и прикл. механика.* – 2008. – Вып. 44. – С. 114-119.
9. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.