

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛАХ

А. О. ВАТУЛЬЯН, Т. А. АНИКИНА, М. С. ШЕВЦОВА

*Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия
vatulyan@math.rsu.ru*

The problem of mechanical properties identification in isotropic inhomogeneous viscoelastic materials based on acoustic sensing and recording of the boundary displacement fields amplitude-frequency characteristics is discussed. The goal is reduced to the solution of coefficient inverse problems for differential operators. Outlines an approach based on the linearization method, applied to the problem of non-homogeneous shear characteristics identification in the torsion vibrations case, the results of computational experiments in bending and torsion rods vibrations are represented.

ВВЕДЕНИЕ

Внедрение в практику новых композиционных и функционально-градиентных материалов требует совершенствования процедуры идентификации их свойств. Если для однородных материалов достаточно успешно восстанавливаются длительные и мгновенные модули, время релаксации в рамках модели стандартного вязкоупругого тела [1,2] при осуществлении стандартных испытаний на ползучесть и релаксацию, определение свойств неоднородных материалов требует решения сложных обратных задач для дифференциальных операторов [3]. Одним из распространенных способов идентификации однородных материалов является двухступенчатая процедура идентификации, причем на первом этапе осуществляется структурная идентификация в рамках одной из известных моделей вязкоупругости [1,2], а на втором-этапе параметрической идентификации -находится конечное число параметров либо с помощью минимизации целевого функционала [4], либо с помощью решения систем некоторых нелинейных уравнений [5].

Главная трудность при нахождении характеристик неоднородных вязкоупругих тел состоит в достаточно сложной процедуре построения операторных соотношений, связывающих искомые и измеряемые функции, что обусловлено переменностью коэффициентов дифференциальных операторов и невозможностью построения в явном виде общих представлений решений. В ситуации, когда коэффициенты дифференциальных операторов переменны, методы решения прямых задач опираются либо на аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для одномерных задач), либо на конечноэлементные технологии.

При решении обратной задачи требуется определить в простейшей постановке 4 одномерные функции. В настоящей работе на первом этапе в низкочастотной области находится начальное приближение искомых функций простейшего вида (постоянные или линейные). При этом идентифицируются функции, являющиеся аналогами длительных и мгновенных модулей при объемном деформировании и сдвиге. На начальном этапе, где требуется определить конечное число параметров, используются генетические алгоритмы, позволяющие минимизировать функционалы невязки с помощью алгоритмов, не требующих вычисления градиентов. На втором этапе реализуется итерационный

процесс уточнения искомых функций. Предложен подход, основанный на обобщенном соотношении взаимности[6] для вязкоупругих тел в рамках концепции комплексных модулей. При этом на каждой итерации необходимо решать стандартную некорректную задачу по обращению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с помощью различных регуляризованных подходов (в частности, метода А. Н. Тихонова). Представлены примеры идентификации распределенных и локализованных неоднородностей в стержнях при анализе крутильных и изгибных колебаний.

ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В качестве иллюстрации общего подхода к определению вязкоупругих характеристик рассмотрим задачу идентификации сдвиговых характеристик при анализе установившихся крутильных колебаний неоднородного консольно закрепленного стержня длины l , колебания в котором вызываются периодическим по времени крутящим моментом амплитуды M , приложенным на незакрепленном конце стержня.

Соответствующая краевая задача для вязкоупругого стержня постоянного поперечного сечения в рамках принципа соответствия для установившихся колебаний [1,2] имеет вид

$$\begin{aligned} (G(x, \omega)J\varphi'(x, \omega))' + \rho J_p \omega^2 \varphi(x, \omega) &= 0, \\ \varphi(0, \omega) &= 0, \quad G(l)J\varphi'(l, \omega) = M. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $G(x, \omega)$ в рамках модели стандартного вязкоупругого тела представима в форме

$$G(x, \omega) = \frac{E(x)in\omega + H(x)}{1 + in\omega} \quad (2)$$

где $E(x)$ - функция, описывающая закон изменения мгновенного модуля, $H(x)$ - функция, описывающая закон изменения длительного модуля, n - время релаксации, которое в рассматриваемом варианте считаем постоянным, J - момент сопротивления кручению, J_p - полярный момент инерции, ρ - плотность стержня. Вводя в рассмотрение безразмерные функции $e(\xi)$, $h(\xi)$ и $\varphi(\xi, \kappa)$ на основании следующих соотношений $E(x) = G_* e(\xi)$, $H(x) = G_* h(\xi)$, где $G_* = \max_{x \in [0, l]} E(x)$, а также безразмерный

параметр $\kappa^2 = c_0^2 \omega^2$, где $c_0^2 = \frac{\rho J_p}{G_* J} l^2$, $\xi = \frac{x}{l} \in [0; 1]$, получим дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами вида:

$$(g(\xi, \kappa)\varphi'(\xi, \kappa))' + \kappa^2 \varphi(\xi, \kappa) = 0 \quad (3)$$

с краевыми условиями:

$$\varphi(0, \kappa) = 0 \quad g(1, \kappa)\varphi'(1, \kappa) = M_*, \quad (4)$$

где $g(\xi, \kappa) = \frac{e(\xi)in\frac{\kappa}{c_0} + h(\xi)}{\left(1 + in\frac{\kappa}{c_0}\right)}$.

ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЇ ЗАДАЧИ

Будем считать, что в задаче (3)-(4) известна дополнительная информация об амплитудно-частотной характеристике на торце стержня следующего вида:

$$\varphi(1, \kappa) = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (5)$$

По этой информации требуется определить неизвестную функцию $g(\xi, \kappa)$, или две неизвестные функции $e(\xi)$ и $h(\xi)$. Далее примем, что отрезок изменения частоты колебаний не содержит резонансных частот. Рассматриваемая задача представляет собой нелинейную и некорректную коэффициентную обратную задачу [3,8].

Для построения операторных соотношений в обратной задаче могут быть использованы два подхода. Один из них опирается на метод линеаризации; кратко его суть состоит в следующем. Пусть известно некоторое начальное приближение, которое определяется в простом классе функций (линейные, постоянные) из условия минимума

функционала невязки $I = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |\varphi(1, \kappa) - f(\kappa)|^2 d\kappa$ и находится с помощью генетического

алгоритма. Далее, представим $g(\xi, \kappa) = g_0(\xi, \kappa) + \varepsilon g_1(\xi, \kappa)$, подставим в исходную задачу, и будем искать ее решение в виде разложения по степеням ε :

$$\varphi(\xi, \kappa) = \varphi_0(\xi, \kappa) + \varepsilon \varphi_1(\xi, \kappa). \quad (6)$$

Приравнивая операторные слагаемые при одинаковых степенях ε , получим 2 краевые задачи нулевого и первого приближения:

$$(g_0(\xi, \kappa)\varphi_0'(\xi, \kappa))' + \kappa^2 \varphi_0(\xi, \kappa) = 0, \quad \varphi_0(0, \kappa) = 0 \quad g_0(1, \kappa)\varphi_0'(1, \kappa) = M_* \quad (7)$$

$$\left[g_1(\xi, \kappa)\varphi_0(\xi, \kappa) \right]' + \left[g_0(\xi, \kappa)\varphi_1'(\xi, \kappa) \right]' + \kappa^2 \varphi_1(\xi, \kappa) = 0 \quad (8)$$

$$\varphi_1(0, \kappa) = 0 \quad g_0(1, \kappa)\varphi_1'(1, \kappa) + g_1(1, \kappa)\varphi_0'(1, \kappa) = 0$$

Краевая задача (7) для дифференциального уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами решалась путем сведения к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода. Обозначив $g_0(\xi, \kappa)\varphi_0'(\xi, \kappa) = v(\xi, \kappa)$, получим каноническую систему дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} v'(\xi, \kappa) &= -\kappa^2 \varphi_0(\xi, \kappa), \\ \varphi_0'(\xi, \kappa) &= \frac{v(\xi, \kappa)}{g(\xi, \kappa)}, \\ \varphi_0(0, \kappa) &= 0 \quad v(1, \kappa) = M_*. \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрируя (9) и удовлетворяя граничным условиям, получим:

$$\begin{aligned} v(\xi, \kappa) &= -\kappa^2 \int_0^\xi \varphi_0(t, \kappa) dt + v(0, \kappa) = \kappa^2 \int_\xi^1 \varphi_0(t, \kappa) dt + v(1, \kappa) = \kappa^2 \int_\xi^1 \varphi_0(t, \kappa) dt - M_* . \\ \varphi_0(\xi, \kappa) &= \int_0^\xi \frac{v(t, \kappa)}{g(t, \kappa)} dt + \varphi_0(0, \kappa) = \kappa^2 \int_0^\xi \frac{1}{g(\zeta, \kappa)} \int_\zeta^1 \varphi_0(t, \kappa) dt d\zeta - M_* \int_0^\xi \frac{d\zeta}{g(\zeta, \kappa)}. \end{aligned}$$

Вводя в рассмотрение функцию $W(t, \xi) = \begin{cases} \int_0^t \frac{d\zeta}{g(\zeta, \kappa)}, t \in [0, \xi] \\ \int_0^\xi \frac{d\zeta}{g(\zeta, \kappa)}, t \in [\xi, 1] \end{cases}$, получим в результате

интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$\varphi_0(\xi, \kappa) = \kappa^2 \int_0^1 \varphi_0(t, \kappa) W(t, \xi) dt - M_* \int_0^\xi \frac{d\zeta}{g(\zeta, \kappa)}, \quad \xi \in [0, 1], \quad (10)$$

Заменяя в (10) интегралы квадратурными формулами Симпсона [9], и используя метод коллокаций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений неизвестной функции:

$$\varphi_0(\xi_i, \kappa) - \kappa^2 \frac{h}{3} \sum_{j=1}^N A_j \varphi_0(\xi_j, \kappa) W(\xi_i, \xi_j) = F_i, \quad (11)$$

которая решалась численно.

Для решения краевой задачи (8) необходимо связать функцию φ_1 первого приближения g_1 и поправки первого приближения. При этом будем использовать условие ортогональности, которое с учетом граничных условий дает интегральное уравнение Фредгольма I-го рода с неотрицательным ядром относительно поправки

$$\int_0^1 \varphi_0' \overline{\varphi_0'} g_1(\xi, \kappa) d\xi = M_* \varphi_1, \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (12)$$

Это же уравнение легко получается на основании полученного выше линейризованного уравнения обратной задачи вида (5).

Отделив вещественную и мнимую части в (12)

$$g_1(x, \kappa) = \text{Re}(g_1(x, \kappa)) + i \text{Im}(g_1(x, \kappa)) = (e_1(x)g_1(\kappa) + h_1(x)g_2(\kappa)) + i(e_1(x) - h_1(x))g_3(\kappa),$$

$$\text{где } g_1(\kappa) = \frac{n^2 \left(\frac{\kappa}{c_0}\right)^2}{1 + n^2 \left(\frac{\kappa}{c_0}\right)^2}, \quad g_2(\kappa) = \frac{1}{1 + n^2 \left(\frac{\kappa}{c_0}\right)^2}, \quad g_3(\kappa) = \frac{n \frac{\kappa}{c_0}}{1 + n^2 \left(\frac{\kappa}{c_0}\right)^2},$$

разобьем уравнение (12) на два вещественных:

$$\int_0^1 \varphi_0' \overline{\varphi_0'} (e(x)g_1(\kappa) + h(x)g_2(\kappa)) dx = M_* \text{Re}(\varphi_1) \quad (13)$$

$$\int_0^1 \varphi_0' \overline{\varphi_0'} (e(x) - h(x))g_3(\kappa) dx = M_* \text{Im}(\varphi_1) \quad (14)$$

Далее, заменяя в (13)-(14) интегралы соответствующими квадратурными формулами, приходим к системе функциональных уравнений относительно узловых значений неизвестных:

$$\sum_{k=1}^N e_k g_1(\kappa) \tilde{A}_k + \sum_{k=1}^N h_k g_2(\kappa) \tilde{A}_k = M_* \text{Re}(\varphi_1) \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^N e_k g_3(\kappa) \tilde{A}_k - \sum_{k=1}^N h_k g_3(\kappa) \tilde{A}_k = M_* \operatorname{Im}(\varphi_1) \quad (16)$$

Частота колибаний змєняється в некотором интервалє, принимая значения $\kappa = \kappa_p$, $p = \overline{1, m}$, характеризующие точки измерения. Таким образом, из (15)-(16) получаем систему $2m$ линейных уравнений относительно $2m$ неизвестных узловых значений функций

$$\sum_{k=1}^N e_k g_1(\kappa_p) \tilde{A}_k + \sum_{k=1}^N h_k g_3(\kappa_p) \tilde{A}_k = M_* \operatorname{Re}(\varphi_1(\kappa_p)), \quad p = \overline{1, m} \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^N e_k g_3(\kappa_p) \tilde{A}_k - \sum_{k=1}^N h_k g_3(\kappa_p) \tilde{A}_k = M_* \operatorname{Im}(\varphi_1(\kappa_p)), \quad p = \overline{1, m} \quad (18)$$

Система (17)-(18) является плохо обусловленной, для нахождения ее решения использован метод регуляризации А.Н. Тихонова [7].

ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Для решения обратной задачи использован итерационный процесс, на каждом шаге которого решается стандартная некорректная задача по обращению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Ниже приведена система операторных уравнений, описывающая i -тый шаг данного итерационного алгоритма:

$$\varphi_0^i(x) - \kappa^2 \int_0^1 \varphi_0^i(\zeta) W^i(\zeta, x) d\zeta = M_* \int_0^x \frac{d\xi}{g_0^i(\xi, \kappa)}, \quad (19)$$

$$W^i(t, x) = \int_0^{\min(t, x)} \frac{d\xi}{g_0^i(\xi, \kappa)},$$

$$\varphi_1^i(1, \kappa) = f(\kappa) - \varphi_0^i(1, \kappa).$$

$$\int_0^1 (\varphi_0^i(x, \kappa))' (\overline{\varphi_0^i(x, \kappa)})' g_1^i(x, \kappa) dx = M_* \varphi_1^i(1), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (20)$$

$$g_0^{i+2}(x, \kappa) = g_0^{i+1}(x, \kappa) + g_1^i(x, \kappa).$$

На каждом шаге процесса находилось новое значение функции φ_0^i на основании решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Далее вычислялась норма невязки между «экспериментальной» и полученной зависимостью смещения от частоты на торце стержня. Если на этом шаге заданная точность достигалась, т.е. $\|f - \varphi_0^i(1)\| \leq \delta$, итерационный процесс останавливался, иначе с помощью найденного значения функции φ_0^i вычислялась правая часть интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (20), а также его ядро. После решения этого уравнения вычислялась поправка к неизвестной функции, и с ее учетом производился следующий этап итерационного процесса.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Вычислительные эксперименты проводились в двух направлениях. В первом направлении основное внимание было уделено построению начального приближения с помощью генетического алгоритма при известной априорной информации о границах искомых функций, позволяющих построить некоторый ограниченный многогранник в пространстве поиска. С помощью предложенной схемы были решены два класса задач 1) о нахождении характеристик вязкоупругих включений в стержнях при анализе крутильных и изгибных колебаний; 2) о нахождении начального приближения в классе линейных функций. Анализ результатов показал достаточную эффективность используемых алгоритмов.

Во втором направлении на основе описанной выше схемы реконструкции проведена серия вычислительных экспериментов для различных типов функций, характеризующих неоднородность. На рис.1, 3 приведены результаты восстановления функций, характеризующих законы изменения мгновенного и длительного модулей для следующих законов изменения: $e(\xi) = 1 + 0.3\xi^2$, $h(\xi) = 1 - 0.2\xi^2$. Сплошной линией показан график исходной функции, квадратиками — восстановленной. Время релаксации считалось известным и принималось равным $\tau = 0.05$ с. На рис. 2, 4 изображены графики относительной погрешности. Следует отметить, что погрешность реконструкции во всех экспериментах не превосходила 5-7%, а наилучшие результаты восстановления достигнуты для монотонных функций. Частотный интервал рассмотрения был выбран до первого резонанса.

Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о достаточной эффективности предлагаемого подхода для различных классов зависимостей.

Работа выполнена при частичной поддержке ЮМИ (г. Владикавказ)

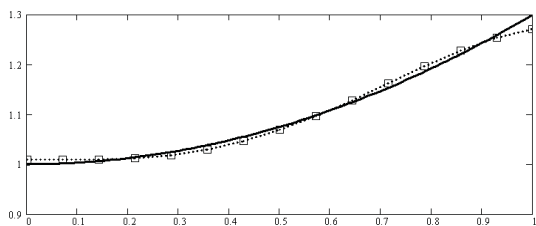


Рис. 1

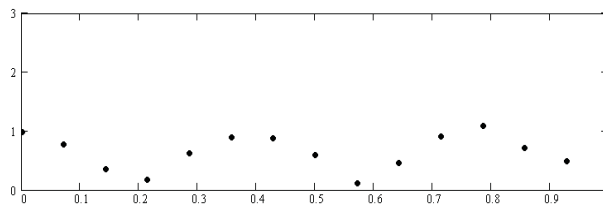


Рис. 2

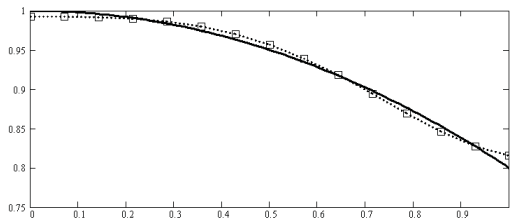


Рис. 3

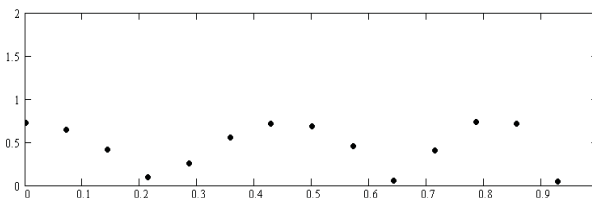


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир. 1974. 319 с.
2. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир. 1974. 338с.
3. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223с.
4. Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Куликова Н.А. Идентификация вязкоупругих характеристик композитных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа динамического поведения полусферических оболочек// ПМТФ. 2006. Т.47. №3. С. 126-133.
5. Ватульян А.О., Явруян О.В. Идентификация композиционных материалов// Механика композиционных материалов и конструкций 2007, т. 13. №2. С.174-180.
6. Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости// Доклады РАН 2005.т. 405, №3, С. 343-345.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач, М.:Наука. 1979. 288с.
8. Ватульян А.О., Бочарова О.В. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня// Акустический журнал, 2009 т. 55, №3. С. 281-288.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука. 1975. 636с.