

ПРО МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ШУМУ, ЯКИЙ ГЕНЕРУЄТЬСЯ ТУРБУЛЕНТНОЮ ТЕЧІЄЮ ПРИ СХОДЖЕННІ З КРАЮ ЖОРСТКОЇ ПІВПЛОЩИНИ

А. О. БОРИСЮК

*Інститут гідромеханіки НАН України,
вул. Желябова, 8/4, 03680 Київ-180 МСП
Тел. (+38-044) 453-2655 E-mail: aobor@mail.ru*

A new analytical method is developed to predict noise generated by turbulent flow near trailing edge of a rigid half-plane. In this method, the turbulent pressure fluctuations, rather than the Lighthill's sources, are chosen as the noise sources. It allows one to use for the chosen sources the information which is already available in the scientific literature, and hence, save much time required for making the corresponding numerical calculations. Also it is important that, in making such calculations, the developed method does not impose any restrictions on the minimum value of the frequency step.

ВСТУП

Акустичні поля, що генеруються турбулентними течіями за тілами становлять значний науковий і практичний інтерес. Для знаходження таких полів зазвичай застосовується теорія Лайтхіла або незначні її модифікації [1-4]. Сформульовані в рамках таких теорій відповідні граничні задачі розв'язуються чисельними або чисельно-аналітичними методами. Обидва типи методів мають відносні недоліки і переваги, а також межі застосування. Проте всі вони, ґрунтуючись на Лайтхлівському описанні джерел шуму, потребують наявності дуже детальної і точної інформації про структуру полів швидкості течії, масової густини середовища, тощо в області, зайнятій турбулентністю, а тому пов'язані зі значними часовими затратами. Це значно знижує їхню привабливість. Іншим суттєвим недоліком зазначених методів є чутливість одержаних у їхніх рамках результатів розрахунку до вибору кроку по частоті. При цьому виявляється, що при зменшенні останнього до деякого критичного значення сумарна похибка обчислень стає такою, що ці методи взагалі стають розбіжними. У такій ситуації виникає потреба а) у розробленні нових методів розв'язування згаданих граничних задач, котрі, можливо за меншої, але задовільної для потреб приктики точності, давали б можливість позбутися описаних недоліків; б) або ж у створенні принципово інших методів знаходження зазначених акустичних полів, які б не ґрунтувалися виключно на теорії Лайтхіла.

У даній роботі розробляється метод другого типу. Він є аналітичним. У ньому в якості джерел шуму вибираються турбулентні пульсації тиску. Це дає можливість використовувати для них вже відому з наукової літератури інформацію, а відтак суттєво заощаджувати час, необхідний для кількісного визначення характеристик поля шуму. Важливим при цьому є те, що при виконанні відповідних чисельних розрахунків у рамках розробленого методу не накладається ніяких обмежень на мінімальну величину кроку по частоті.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається жорстка півплощина S_r ($x < 0, y = 0$) у необмеженому середовищі. На її верхній поверхні в межах смуги $x < 0, y = 0, |z| \leq L_z/2$ створюється течія, котра розвивається у перпендикулярному до краю $x = 0, y = 0$ напрямку (Рис.1). Течія є турбулентною, має осереднену швидкість U , характеризується малим числом Маха і, взаємодіючи з краєм півплощини, генерує шум. Необхідно знайти це поле шуму і встановити кількісну залежність його характеристик від параметрів течії та півплощини.

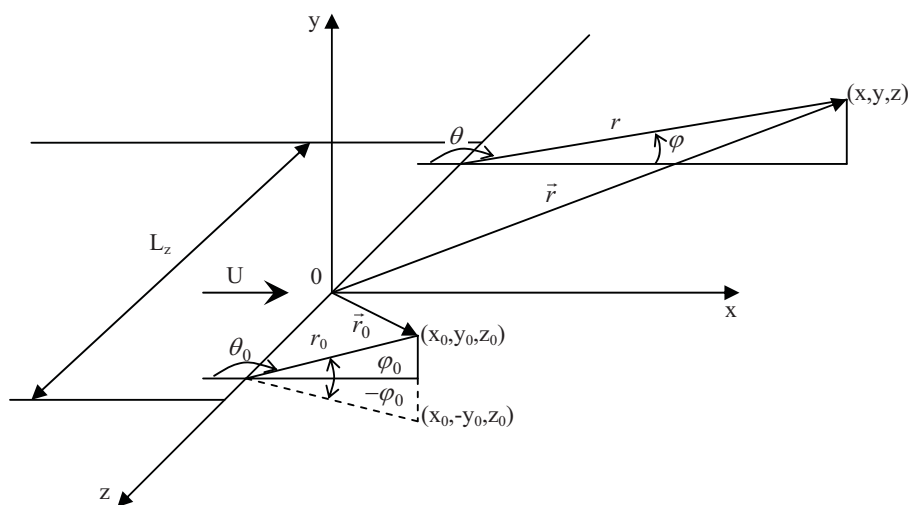


Рис. 1

При традиційному підході¹ до розв’язування цієї задачі область шумоутворення біля краю півплощини S_r моделюється розподіленими в ній квадрупольними джерелами Лайтхіла $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$, а шукане акустичне поле описується рівнянням [1-5]

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (1)$$

Граничними умовами є рівність нулевій нормальній компоненті акустичної швидкості на поверхні жорсткої структури:

$$\left. \frac{\partial p_a}{\partial y} \right|_{x < 0, y = 0} = 0, \quad (2)$$

та умова випромінювання у нескінченності.

У рівняннях (1), (2) ρ_a і p_a є акустичними флуктуаціями відповідно масової густини середовища і тиску, зв’язаними між собою співвідношенням $p_a = c_0^2 \rho_a$; t – часом; c_0 – швидкістю звуку в незбуреному середовищі; $T_{ij} \approx \rho_i u_i u_j$ – напруженнями Лайтхіла; а

¹ Цей підхід, як зазначено у вступі, ґрунтується виключно на теорії Лайтхіла. Згідно з нею без втрати загальності можна вважати, що в’язкість рідини відіграє суттєву роль лише в області шумоутворення, а згенерований шум поширюється в ідеальному стисливому середовищі.

u_i – компонентами швидкості середовища. Крім цього, тут і далі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

У циліндричній системі координат (r, φ, z) , яка разом з прямокутною декартовою (x, y, z) вводиться для розв'язування задачі (див. Рис.1), оператор Лапласа і права частина рівняння (1) мають такий вигляд [3, 5]:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \rho u_r^2}{\partial r_0^2} + \frac{\partial^2 \rho u_z^2}{\partial z_0^2} + \left(\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \rho u_\varphi^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \right) + \frac{2}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left(\frac{\partial}{\partial r_0} \right) - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \right) \times$$

$$\times \rho u_r u_\varphi + 2 \frac{\partial^2 \rho u_r u_z}{\partial r_0 \partial z_0} + \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_0 \partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \right) \right) \rho u_\varphi u_z,$$

де (r_0, φ_0, z_0) - координати джерела шуму.

2. АКУСТИЧНЕ ПОЛЕ

2.1. Традиційний підхід

При традиційному підході⁽⁺⁾ розв'язування сформульованої у попередньому розділі граничної задачі починається із застосування до неї часового перетворення Фур'є

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt.$$

Тоді в частотній області рівняння (1) і (2) набувають відповідно такого вигляду:

$$\nabla^2 \tilde{p}_a + k_0^2 \tilde{p}_a = - \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial y} \right|_{x<0, y=0} = 0, \quad (4)$$

а розв'язок системи (3), (4), згідно з теоремою Гріна, дається об'ємним інтегралом [3,5]

$$\tilde{p}_a(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(\vec{r}_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) dV(\vec{r}_0). \quad (5)$$

У співвідношеннях (3)-(5) $k_0 = \omega / c_0$ - акустичне хвильове число; ω - колова частота; V_0 - область шумоутворення біля краю півплощини S ; \vec{r} та \vec{r}_0 - радіус-вектори відповідно точки поля і акустичного джерела (див. Рис.1); а G - функція Гріна рівняння Гельмгольца для досліджуваної механічної структури. Вона задовольняє рівняння

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) + k_0^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

(де δ - дельта-функція Дірака), граничну умову

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y_0} \right|_{x_0<0, y_0=0} = 0$$

та умову випромінювання у нескінченність.

Співвідношення (5) разом із виразом для функції Гріна G є загальним розв'язком досліджуваної проблеми при традиційному підході до її вирішення. Ці співвідношення

далі використовуються при знаходженні виразів для характеристик акустичного поля і проведенні відповідних чисельних розрахунків [3, 5].

2.2. Новий підхід

2.2.1. Модифікація геометрії задачі

Чисельні розрахунки одержаних у рамках традиційного підходу виразів для характеристик акустичного поля щоразу потребують наявності дуже детальної і точної інформації про структуру полів параметрів турбулентності, які визначають джерела Лайтхіла. Одержання такої інформації пов'язане зі значними затратами часу, що призводить до низької (з огляду на ці затрати) ефективності описаної у підрозділі 2.1 процедури знаходження розв'язку. Очевидно, що цю ефективність можна було би значно підвищити (при збереженні задовільної для потреб практики точності) у разі вираження характеристик акустичного поля через параметри турбулентності, інформація про які вже задалегідь відома.

Таким параметром є пульсації тиску на стінці p_t , для яких існує достатня кількість літературних даних. Проте використання величини p_t в якості акустичного джерела (замість джерел Лайтхіла) потребує незначної модифікації геометрії задачі. Вона полягає в умовному продовженні півплощини S_r контрольною поверхнею S_c ($x > 0, y = 0$) і повороті останньої навколо краю $x=0, y=0$ на малий кут α так (Рис. 2), щоб позбутися турбулентності під поверхнею S_c . При цьому малий кут α дозволяє говорити про незначний його вплив на характеристики дальнього акустичного поля і вважати півплощини S_r та S_c компланарними при виконанні подальших операцій [5].

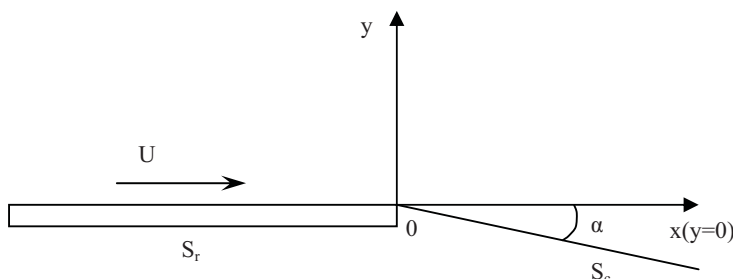


Рис. 2

2.2.2. Акустичний тиск

Для зображеної на рис.2 модифікованої геометрії задачі розв'язок системи рівнянь (3), (4) можна записати у вигляді інтегралу по смузі S_s ($x_0 > 0, y_0 = 0, -L_z/2 \leq z_0 \leq L_z/2$) контрольною поверхні S_c , де є турбулентна течія [5]:

$$\check{p}_a(\vec{r}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_s} \check{p}_t(\vec{r}_0, \omega) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega)}{\partial y_0} dS(\vec{r}_0). \quad dS(\vec{r}_0) = dx_0 dz_0. \quad (6)$$

У формулі (6) \check{p}_t є Фур'є-образом турбулентного тиску, а G – функцією Гріна, про яку йшла мова у підрозділі 2.1. Ця функція має такий вигляд [3, 5]:

$$G = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-ik_0 R}}{R} \int_{-\infty}^{u_R} e^{-iu^2} du + \frac{e^{-ik_0 R'}}{R'} \int_{-\infty}^{u_{R'}} e^{-iu^2} du \right], \quad (7)$$

$$\text{де } u_R = 2 \left(\frac{k_0 r r_0}{D+R} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta - \theta_0}{2}; \quad u_{R'} = 2 \left(\frac{k_0 r r_0}{D+R'} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta + \theta_0}{2}; \quad \theta = \pi - \phi; \quad \theta_0 = \pi - \phi_0;$$

$$\begin{aligned}
 R &= |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + (z - z_0)^2}; \\
 R' &= |\vec{r} - \vec{r}'_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 + (z - z_0)^2} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta + \theta_0) + (z - z_0)^2}; \\
 D &= \sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}.
 \end{aligned}$$

У дальньому полі верхні межі інтегрування у формулі (7) спрощуються [5]:

$$u_R \approx \sqrt{2k_0 r_0} \sin \Phi \cos \frac{\theta - \theta_0}{2}, \quad u_{R'} \approx \sqrt{2k_0 r_0} \sin \Phi \cos \frac{\theta + \theta_0}{2}, \quad \sin \Phi = r / \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$$

і, за умови $k_0 r_0 \ll 1$, функція G набуває такого вигляду [5]:

$$G = \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \left[\frac{1}{2} + \frac{2e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2k_0 r_0} \sin \Phi \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} + O(k_0 r_0) \right]. \quad (8)$$

Тоді її нормальна похідна у співвідношенні (6) дається виразом [5]:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y_0} \right|_{x_0 > 0, y_0 = 0} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-ik_0 R_0}}{R_0} \sqrt{2k_0} \sin \Phi \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{x_0}}; \quad R_0 = R|_{y_0=0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2}. \quad (9)$$

Порівняльний аналіз співвідношення (6) зі співвідношенням (5) показує, що, по-перше, в (6) p_a виражається через тиск p_i , для якого є значна кількість літературних даних. Натомість у (5) p_a виражається через джерела Лайтхіла, необхідної інформації про які немає. По-друге, підінтегральний вираз в (6) є одночленом, тоді як у (5) – дев'ятичленом. І по-третє, використання формули (6) потребує знання її підінтегрального виразу лише на нижній границі області шумоутворення біля краю півплощини S_r , а формули (5) – у всій зазначеній області. Це вказує на те, що чисельні розрахунки характеристик акустичного поля за виразами, одержаними на основі формули (6), потребуватимуть значно менших часових затрат у порівнянні з розрахунками на основі формули (5).

2.2.3. Частотний спектр акустичного тиску

Частотний спектр P_a акустичного тиску характеризує розподіл акустичної енергії по частоті ω у точці поля \vec{r} і визначається зі співвідношення

$$P_a(\vec{r}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{p}_a^*(\vec{r}, \omega) \tilde{p}_a(\vec{r}, \omega') \rangle, \quad (10)$$

в якому дужки $\langle \dots \rangle$ означають операцію осереднення за множиною реалізацій, а зірочка вказує на комплексне спряження. Підстановка в (10) формули (6) дає шуканий вираз для спектра P_a . У разі *неоднорідної* турбулентності він має такий вигляд [5]:

$$P_a(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{S_x} dx_0 dz_0 \iint_{S_x} S_p(x_0, z_0, x'_0, z'_0, \omega) \left(\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega)}{\partial y_0} \right)^* \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y'_0} dx'_0 dz'_0, \quad (11)$$

де S_p є взаємним спектром тиску p_i . Якщо турбулентність *однорідна*, S_p стає функцією лише відстані між джерелами і частоти: $S_p(x_0, z_0, x'_0, z'_0, \omega) = S_p(\xi_x, \xi_z, \omega)$ ($\xi_x = x'_0 - x_0$, $\xi_z = z'_0 - z_0$). У цьому разі він виражається через частотно-хвильовий спектр Φ_p тиску p_i :

$$S_p(\xi_x, \xi_z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_p(k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x \xi_x + k_z \xi_z)} dk_x dk_z, \text{ де } k_x \text{ та } k_z \text{ – хвильові числа у напрямках}$$

осей x та z відповідно. Тоді формула (11) значно спрощується [5]:

$$P_a(\vec{r}, \omega) = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{T}(\vec{r}, k_x, k_z, \omega) \right|^2 \Phi_p(k_x, k_z, \omega) dk_x dk_z, \quad (12)$$

$$\left| \tilde{T}(\vec{r}, k_x, k_z, \omega) \right|^2 = \frac{2}{(2\pi)^4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \Phi_0 \frac{k_0 L_z^2 \sin^2(q_z L_z / 2)}{q_x |\vec{r}|^2 (q_z L_z / 2)^2},$$

$$\sin \Phi_0 = r / |\vec{r}|, \quad q_x = k_x - k_0 x / |\vec{r}|, \quad q_z = k_z - k_0 z / |\vec{r}|.$$

Аналіз співвідношень (11), (12) показує, що в них всі інтеграли беруться по чітко визначених областях, а підінтегральні функції мають аналітичне представлення. Відтак чисельні розрахунки спектра P_a на основі цих співвідношень не потребуватимуть значних затрат часу і не накладатимуть ніяких обмежень на величину кроку по частоті.

2.2.4. Загальні зауваження

Формули (6)-(9), (11) і (12) дають загальний розв’язок задачі про генерацію шуму турбулентною течією біля краю жорсткої півплощини в рамках розробленого у даній роботі методу. У цих формулах всі підінтегральні величини є відомими функціями, а межі інтегрування чітко визначені. Це дозволяє проводити якісний та кількісний аналіз досліджуваних характеристик поля шуму у відповідних межах зміни параметрів задачі. При цьому чисельні розрахунки таких характеристик не будуть пов’язані зі значними затратами часу і можуть проводитися для довільного кроку по частоті.

ВИСНОВКИ

1. У даній роботі розроблено новий метод знаходження шуму, який генерується турбулентною течією при її сходженні з краю жорсткої півплощини. Цей метод є аналітичним і ґрунтується на використанні методу функцій Гріна.
2. У рамках розробленого методу досліджено випадки однорідної та неоднорідної турбулентності і одержано відповідні вирази для статистичних характеристик поля шуму.
3. Основна перевага запропонованого методу над існуючими полягає в тому, що у ньому в якості джерел шуму вибираються пульсації тиску, а не джерела Лайтхіла. Це дає можливість для вибраних джерел використовувати вже відому з літератури інформацію, а відтак суттєво заощаджувати час, необхідний для кількісного визначення характеристик шуму. Важливим при цьому є те, що при виконанні відповідних розрахунків у рамках розробленого методу не накладається обмежень на величину кроку по частоті.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 1. General theory // Proc. Roy. Soc. London. – 1952. – A211. – P. 564-587.
2. *Blake W.K.* Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration. – New York: Acad. Press Inc., 1986. – vol.1,2. – 974 p.
3. *Ffowcs Williams J. E., Hall L. H.* Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane // J. Fluid Mech. – 1970. – 40. – P. 657-670.
4. *Голдштейн М.Е.* Аэроакустика. – М.: Машиностроение, 1981. – 294с.
5. *Borisyuk A. O.* Prediction of far-field-sound from turbulence near plate in flow using wall pressure fluctuations as the source model // DFG-Bericht, Institut für Akustik und Sprachkommunikation, TU Dresden. – 2003. – 25 p.