

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ГЕНЕРАТОР – ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ

А. Ю. ШВЕЦ, В. А. ПЕЧЕРНЫЙ

НТУУ Киевский политехнический институт
e-mail: pevlan@online.ua

Исследуется возникновение и развитие детерминированного хаоса в динамической системе "генератор – пьезокерамический преобразователь". Построены карты динамических режимов системы и рассмотрены основные сценарии перехода от регулярных режимов к хаотическим. Детально описан переход к хаосу вследствие разрушения квазипериодических аттракторов системы.

Основой для функционирования пьезокерамических преобразователей является эффект связанности механического и электрического полей в пьезокерамических средах. Заметим, что практически во всех публикациях задачи о поведении электроупругих тел рассматриваются в, так называемой, идеальной постановке. В такой постановке вопрос о влиянии пьезокерамического тела на устройство возбуждения колебаний, например генератор напряжения, не изучается. На практике применение таких "идеальных" моделей может привести к грубым ошибкам в описании динамики системы "пьезокерамический преобразователь-генератор". В частности, может быть полностью утрачена информация об установившихся детерминированных хаотических режимах.

В работах [1, 2] рассматривалась электроупругая динамическая система, состоящая из стержневого пьезокерамического преобразователя, возбуждаемого электроламповым LC-генератором ограниченной мощности. В этих работах приведено подробное описание такой системы, построена ее математическая модель и доказано существование в ней детерминированного хаоса. Было установлено существование нескольких типов хаотических аттракторов и сценариев перехода к хаосу в рассмотренной детерминированной динамической системе "пьезокерамический преобразователь-генератор". Целью настоящей работы является развитие и углубление исследований, начатых в [1, 2].

В соответствии с работами [1, 2] математическая модель системы "пьезокерамический преобразователь-генератор" может быть записана в виде следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta, \\
 \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 - \alpha_4\beta, \\
 \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma, \\
 \frac{d\gamma}{d\tau} &= -\alpha_0\beta + \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_7\gamma.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь безразмерные переменные ξ , ζ характеризуют внутренние процессы, протекающие в генераторе, а переменные β , γ - пропорциональны сигналу, излучаемому

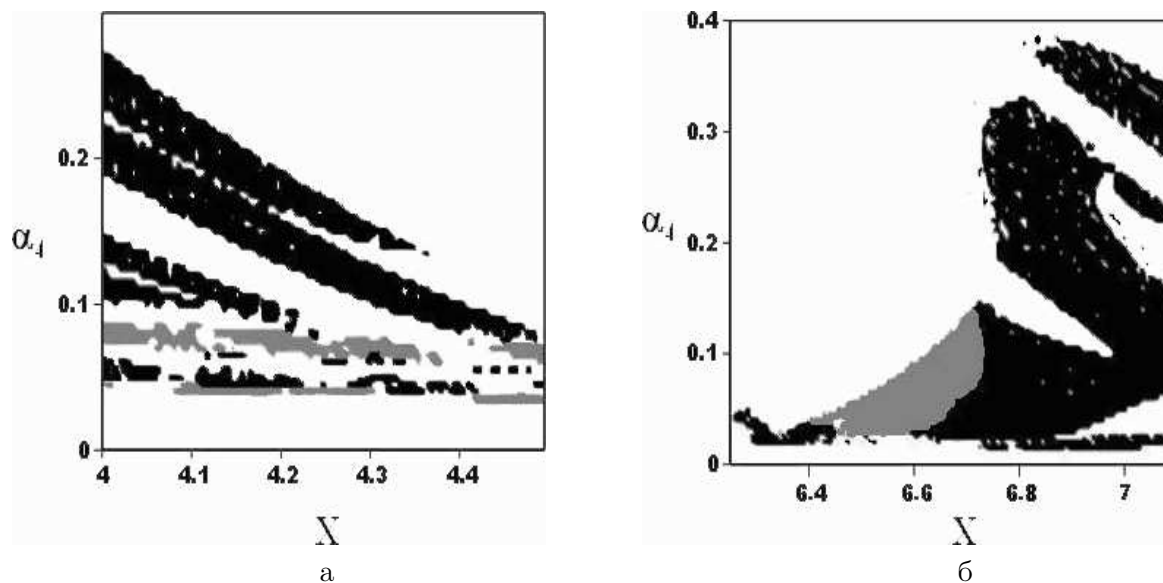


Рис. 1. Карты динамических режимов.

преобразователем во внешнюю среду; α_k , $k = 0, 1, \dots, 7$ - коэффициенты, определяемые по достаточно громоздким формулам через электромагнитные, геометрические и деформационные параметры генератора и преобразователя [1].

Поскольку система (1) является системой нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, то все ее исследования проводились при помощи численных методов на основе общей методики таких исследований, изложенной в [1]. Дополнительно был разработан алгоритм и создан программный пакет для построения карт динамических режимов системы. Карта динамических режимов представляет собой диаграмму на плоскости, где по осям координат отложены какие-либо два из параметров системы и показаны области установившихся динамических режимов различных типов.

При проведении численных экспериментов полагалось, что параметры системы принимают значения $\alpha_0 = 0.995$, $\alpha_1 = 0.04$, $\alpha_2 = 0.63 \cdot X$, $\alpha_3 = 0.18 \cdot X$, $0 \leq \alpha_4 \leq 0.2$, $\alpha_5 = -0.0604$, $\alpha_6 = -0.12$, $\alpha_7 = 0.01$. Отметим, что выбранным таким образом параметрам системы соответствуют реальные характеристики LC -генератора и пьезокерамического преобразователя [2]. Здесь X - безразмерный множитель, который, как показано в [2], зависит от характеристик лампы генератора. В качестве бифуркационных выбирались параметры X и α_4 . Заметим, что α_4 характеризует взаимосвязь между преобразователем и генератором.

На рис. 1а-б приведены, полученные в результате анализа и обработки данных компьютерных экспериментов, листы карты динамических режимов системы "пьезокерамический преобразователь-генератор". На рис. 1а белые области карты соответствуют тем значениям X и α_4 , при которых аттракторами системы (1) будут предельные циклы с сигнатурой спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) вида $\langle 0, -, -, - \rangle$. Серые области карты соответствуют квазипериодическим аттракторам с сигнатурой спектра ЛХП вида $\langle 0, 0, -, - \rangle$. И, наконец, черные области - соответствуют хаотическим аттракторам с сигнатурой спектра ЛХП вида $\langle +, 0, -, - \rangle$. Как видно

из рис. 1а, в области существования хаотических аттракторов вклиниваются небольшие по площади области существования предельных циклов. Это, так называемые, "окна периодичности" в хаосе. На рис. 1б белому и черному цветам по-прежнему соответствуют области предельных циклов и хаотических аттракторов. Серым же цветом на этом рисунке обозначены области, в которых аттракторами системы (1) будут гиперхаотические аттракторы. Сигнатура спектра ЛХП гиперхаотических аттракторов имеет вид $\langle +, +, 0, - \rangle$. То есть, в спектре ЛХП у них присутствуют два положительных показателя. Построенные листы карты динамических режимов дают исчерпывающую информацию о качественном характере динамических режимов, реализующихся в соответствующих областях пространства параметров системы (1).

Далее остановимся на некоторых новых, по сравнению с работами [1,2], типах аттракторов и сценариях перехода к хаосу, выявленных в системе (1). Положим $X = 4.25$ и рассмотрим бифуркации системы, возникающие при изменении параметра α_4 . То есть, изучим поведение системы при вертикальном разрезе карты динамических режимов (рис. 1а). На рис. 2 построены зависимости старших ляпуновских характеристических показателей системы от параметра α_4 . На этом рисунке сплошной линией нанесена зависимость старшего показателя λ_1 от α_4 , а штриховой – зависимость второго показателя λ_2 от α_4 . На интервалах, где старший показатель принимает положительное значение, в системе реализуются хаотические режимы. Построение графика второго характеристического показателя позволяет идентифицировать те области значения управляющего параметра, при которых в системе устанавливаются квазипериодические режимы (оба показателя – нулевые).

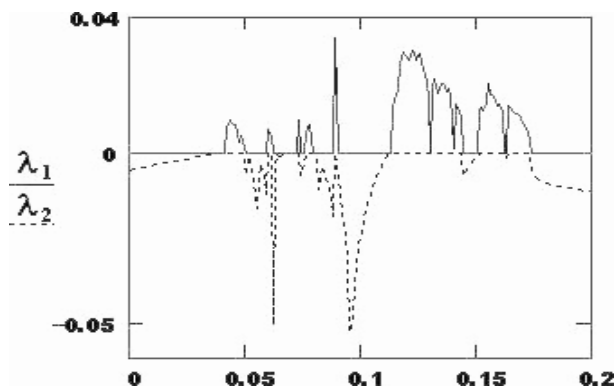


Рис. 2. Зависимости ляпуновских показателей от α_4 .

Рассмотрим изменения типов аттракторов системы, которые имеют место при уменьшении значений параметра α_4 . На сегменте $[0.174, 0.2]$ в системе существует устойчивый предельный цикл. Затем при $\alpha_4 = 0.173$ этот предельный цикл исчезает и в системе, в результате седло-узловой бифуркации, возникает хаотический аттрактор. Переход к хаосу происходит через перемежаемость по сценарию Помо–Манневилля. Такие переходы к хаосу в системе (1) детально описаны в [1]. Как видно из рис. 2 хаотические аттракторы существуют на полусегменте $[0.15, 0.173)$ за исключением окна периодичности в окрестности значения $\alpha_4 = 0.162$. Далее при $\alpha_4 = 0.15$ в системе снова возникает регулярный аттрактор – предельный цикл.

При дальнейшем уменьшении управляющего параметра на очень незначитель-

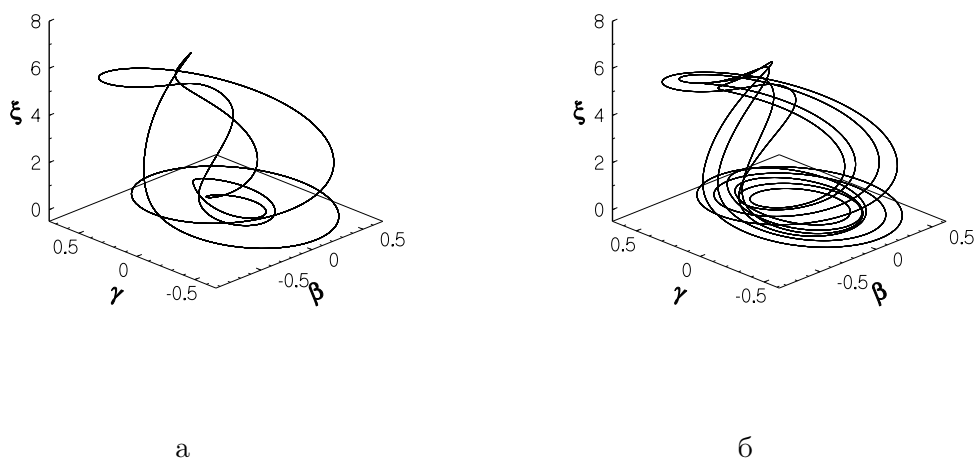


Рис. 3. Проекция фазовых портретов предельных циклов при $\alpha_4 = 0.15$ (а) и $\alpha_4 = 0.144$ (б).

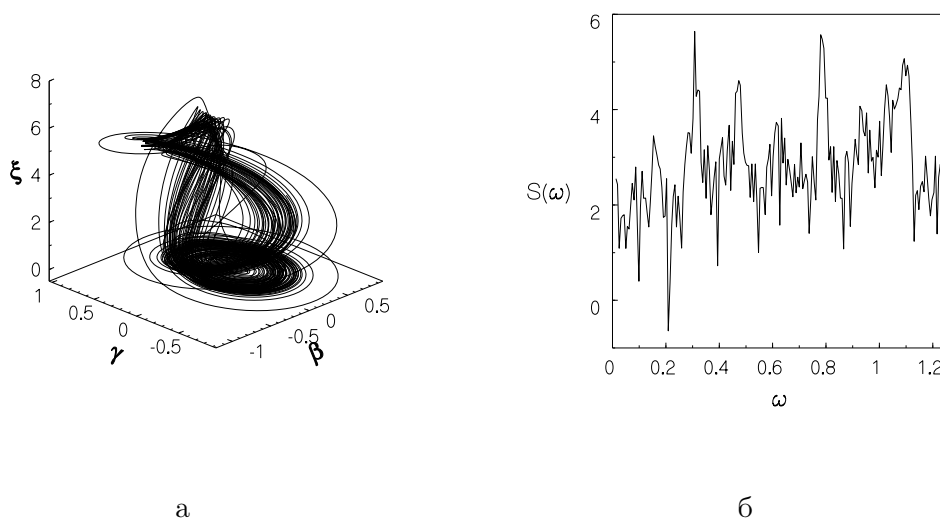


Рис. 4. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора (а) и Фурье-спектр (б) при $\alpha_4 = 0.143$.

ном интервале $(0.1435, 0.15)$ реализуется бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода. На рис. 3 приведен такой предельный цикл и первая бифуркация удвоения его периода. Этот бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода приводит при $\alpha_4 = 0.143$ к рождению хаотического аттрактора. На рис. 4 приведена проекция его фазового портрета и распределение спектральной плотности. Фурье-спектр хаотического аттрактора – сплошной. Переход от регулярных режимов к хаотическим осуществляется в строгом соответствии со сценарием Фейгенбаума.

Следующая далее область хаотических режимов имеет окна периодичности в

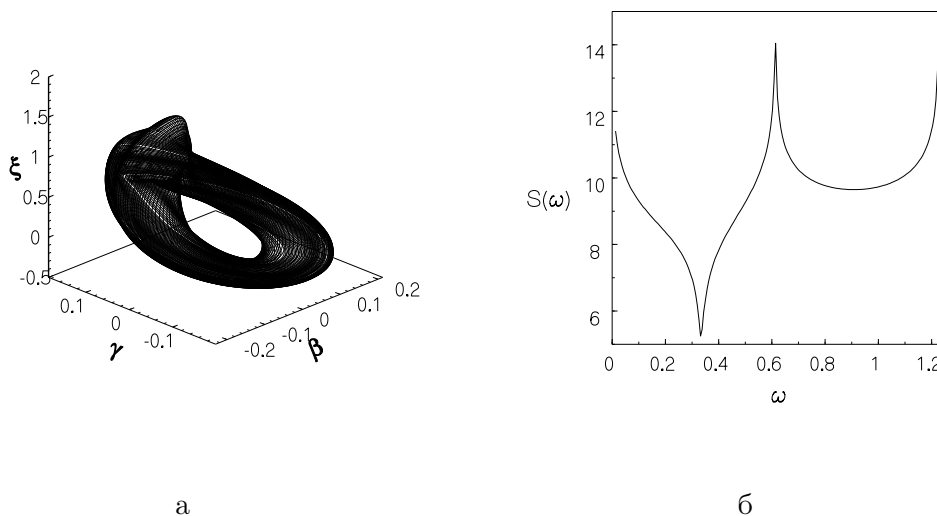


Рис. 5. Проекция фазового портрета квазипериодического аттрактора (а) и Фурье-спектр (б) при $\alpha_4 = 0.068$.

окрестности значений $\alpha_4 = 0.14$, $\alpha_4 = 0.13$ и $\alpha_4 = 0.116$. Следует отметить, что периоды предельных циклов из этих окон рационально не соизмеримы с базовым периодом каскада Фейгенбаума. При дальнейшем уменьшении бифуркационного параметра, при $\alpha_4 = 0.114$, хаотический аттрактор исчезает и в системе вновь возникает предельный цикл.

Устойчивые предельные циклы существуют на полусегменте $(0.068, 0.114]$. При $\alpha_4 = 0.068$ существующий в системе предельный цикл теряет свою устойчивость и, вследствие бифуркации Неймарка, возникает квазипериодический аттрактор – предельный тор [3]. На рис. 5 приведена проекция фазового портрета предельного тора и распределение спектральной плотности системы. Траектории системы всюду плотно покрывают тороидальную поверхность в фазовом пространстве и с некоторым почти периодом возвращаются в окрестность любой своей точки. Фурье-спектр такого режима является дискретным, но не гармоническим.

При дальнейшем уменьшении параметра α_4 через серию из резонансных предельных циклов существующий предельный тор разрушается, и в системе возникает хаотический аттрактор. В этом случае реализуется сценарий перехода к хаосу через квазипериодические режимы. Аналогичный сценарий имеет место и на интервале $(0.42, 0.49)$.

На рис. 6 приведена проекция фазового портрета хаотического аттрактора системы и распределение его спектральной плотности при $\alpha_4 = 0.62$. В этом случае Фурье-спектр аттрактора становится сплошным. При этом имеет место бесконечная возвращаемость траектории системы в окрестность любой своей точки, однако моменты времени таких возвратов представляют собой хаотическую последовательность.

Таким образом, в результате проведенных исследований и с учетом результатов работы [1] удалось установить, что детерминированная динамическая система "пьезо-керамический преобразователь-генератор" обладает исключительным разнообразием

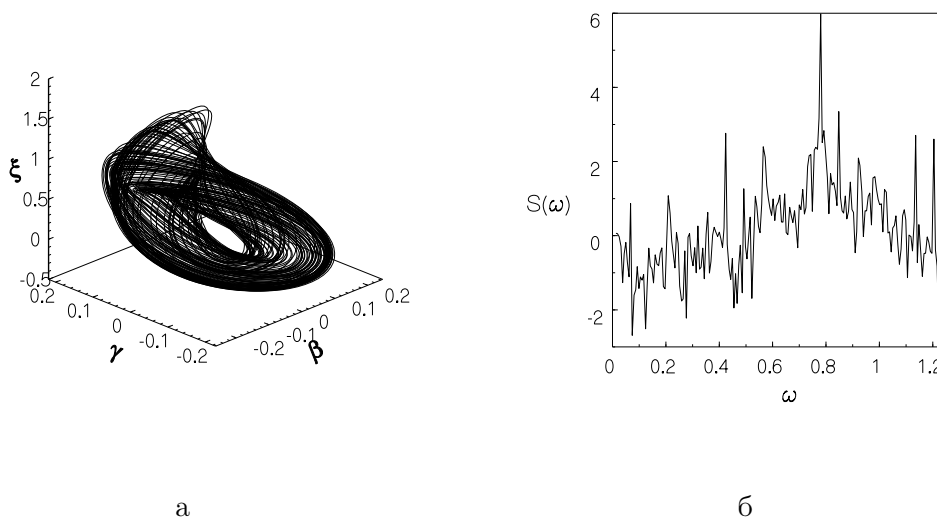


Рис. 6. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора (а) и Фурье-спектр (б) при $\alpha_4 = 0.062$.

динамического поведения. В ней реализуются все основные сценарии перехода к хаосу (каскад Фейгенбаума, сценарий Помо–Манневилля, переход к хаосу через разрушение квазипериодического аттрактора). У этой системы существуют все типы регулярных аттракторов (положения равновесия, предельные циклы и торы) и имеют место хаотические аттракторы различных типов, в том числе и гиперхаотические. Рассмотренная система может определенным образом являться "энциклопедией" регулярной и хаотической динамики детерминированных динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. Детерминированный хаос в системе генератор - пьезокерамический излучатель // Нелинейная динамика.– 2006.– **2**, N **1**.– С. 53 - 73.
2. Krasnopol'skaya T.S., Shvets A.Yu. Chaos in vibrating system with a limited power-supply // Chaos.– 1993.– **3**, N **3**.– P. 387 - 395.
3. Кузнецов С. П. Динамический хаос.– М.: Физматлит, 2001.– 296 с.