

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ СДВИГА В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ СЛОЕ С ПРОДОЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

И. А. УЛИТКО, А. В. БОРИСЕЙКО

*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко  
ул. Владимирская, 64, 01033, Киев-033, Украина  
тел. (044) 259-03-07; e-mail: ulitko@univ.kiev.ua*

Изучаются связанные электроупругие колебания сдвигового типа в пьезокерамическом слое, который находится в свободном вращательном движении вокруг оси, перпендикулярной к его электродированным граням. Дисперсионные решения для перемещений и напряжений подчинены законам кориолисовой дисперсии упругих волн, что приводит к эллиптической плоской поляризации колебаний. Получены асимптотические формулы для перемещений и напряжений при малых угловых скоростях вращения слоя, типичных для датчиков угловой скорости, даны формулы для расчета частот колебаний в зависимости от величины угловой скорости.

## ВВЕДЕНИЕ

Практический интерес к теоретическому изучению эффектов кориолисовой дисперсии, поляризации и модуляции упругих колебаний и волн во вращающихся упругих телах вызван потребностями разработки различных типов твердотельных волновых гироскопов. Одним из перспективных направлений в теории волновых гироскопов являются гироскопические сенсоры на объемных акустических волнах [1], теоретические модели которых основываются на решениях граничных задач для упругих и электроупругих слоя и полупространства, находящихся во вращательном движении [2].

В представленном докладе исследуются связанные электроупругие колебания сдвигового типа, распространяющиеся в пьезокерамическом слое между его плоскими электродированными гранями, когда слой находится в свободном вращательном движении. Предполагаемая продольная (в срединной плоскости) поляризация пьезокерамики в случае сплошных электродов и однородного внешнего электрического поля позволяют реализовать случай однородного плоского напряженного состояния в слое и распространения стационарных волн сдвига по его толщине. За счет вращательного движения слоя уравнения колебаний являются связанными не только электромеханически, по функции электрического потенциала  $\psi$ , но также и по ускорениям Кориолиса, что в свою очередь приводит к дисперсионным решениям в виде линейной суперпозиции электромеханически связанных и несвязанных волн сдвига.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При выводе уравнений движения слоя с продольной поляризацией (см. рис. 1) будем исходить из предположения, что на его плоских лицевых гранях  $z = \pm h$  отсут-

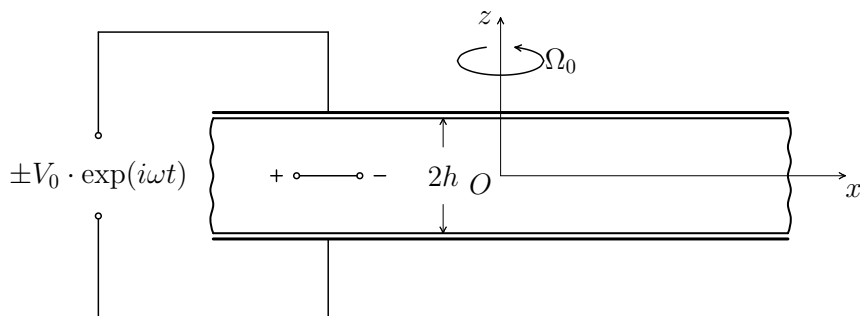


Рис. 1. Равномерно вращающийся пьезокерамический слой

ствуют какие-либо механические напряжения.

$$\sigma_z|_{z=\pm h} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=\pm h} = 0, \quad \tau_{zx}|_{z=\pm h} = 0. \quad (1)$$

Предполагаем, что возбуждение колебаний осуществляется посредством гармонического генератора электрических напряжений с круговой частотой  $\omega$

$$E_z|_{z=\pm h} = \pm \frac{V_0}{h} \exp(i\omega t), \quad E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad (2)$$

где  $V_0$  – значение потенциала на электроде,  $h$  – половина толщины слоя. За счет того, что плоские лицевые грани  $z = \pm h$  полностью покрыты электродами, отличной от нуля является только толщинная компонента напряженности поля  $E_z$ . Элементарный анализ уравнений пьезоэффекта для этого типа поляризации [3] при отсутствии каких-либо механических сил (1) и при условиях электрического нагружения (2) свидетельствует, что механическое напряженное состояние слоя будет характеризоваться однородными по координатам срединной плоскости  $x, y$  касательными напряжениями  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , причем напряжения в направлении поляризации керамики будут эквивалентны разности приложенных потенциалов  $\tau_{xz} \sim -e_{15}V_0/h$ . Так как что ось вращения слоя  $Oz$  не изменяет своего положения в пространстве, упругие перемещения также характеризуются однородными по координатам  $x, y$  компонентами  $u_x(z, t)$  и  $u_y(z, t)$ . Компоненту перемещений  $u_z(z, t)$  в проекции на ось вращения  $Oz$ , которая не испытывает влияния сил инерции вращательного движения, из дальнейшего рассмотрения исключим. В силу этих предположений соотношения линейной теории электроупругости для случая плоского напряженного состояния запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z}, & E_z &= -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \tau_{xz} &= c_{44}^E \frac{\partial u_x}{\partial z} + e_{15} \frac{\partial \psi}{\partial z}, & \tau_{yz} &= \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z}, & D_z &= -\epsilon_S^{11} \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{15} \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{44}^E$  – упругие постоянные,  $e_{15}$  – пьезопостоянная,  $\epsilon_S^{11}$  – диэлектрическая проницаемость керамики. Характеризуя неучтенные здесь компоненты связанного поля, отметим, что тождественно обращаются в ноль механические напряжения  $\tau_{xy}$  и индукция  $D_y$ , рассчитанные по координатам срединной плоскости  $x, y$ . Нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  будут отличными от нуля и будут зависеть от осевой деформации

$\varepsilon_z$ , т.е. перемещений  $u_z(z, t)$ , исключенных из рассмотрения. Также зависящей от деформации  $\varepsilon_z$  является компонента электрической индукции  $D_x$ , для которой предусмотрим условие:  $D_x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ .

Касательные напряжения  $\tau_{zx}, \tau_{zy}$  и индукция  $D_z$  из (3) необходимо удовлетворяют уравнениям движения Ньютона и уравнению вынужденной электростатики [3]. После очевидных преобразований получим систему трех связанных уравнений относительно упругих перемещений  $u_x(z, t), u_y(z, t)$  и функции потенциала  $\psi$

$$\begin{aligned} c_{44}^E \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \rho(\ddot{u}_x - \Omega_0^2 u_x - 2\Omega_0 \dot{u}_y), \\ \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} &= \rho(\ddot{u}_y - \Omega_0^2 u_y - 2\Omega_0 \dot{u}_x), \\ \epsilon_{11}^S \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= e_{15} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях колебаний вращающегося слоя (4) через  $\Omega_0$  обозначена угловая скорость вращения вокруг оси  $Oz$ , а при записи сил инерции в правых частях исключены статические слагаемые от центробежных сил. Эти уравнения являются связанными между собой не только по второй производной от функции потенциала  $\psi$  но и по компонентам ускорений Кориолиса  $2\Omega_0 \dot{u}_x, 2\Omega_0 \dot{u}_y$ . Подставляя выражение для  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  из третьего уравнения в первое, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_{2,1}} (\ddot{u}_x - \Omega_0^2 u_x - 2\Omega_0 \dot{u}_y), \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_{2,2}} (\ddot{u}_y - \Omega_0^2 u_y - 2\Omega_0 \dot{u}_x). \end{aligned} \quad (5)$$

Для коэффициента электромеханической связи  $k_{15}^2$ , скорости связанной электроупругой волны сдвига в направлении оси поляризации пьезокерамики  $c_{2,1}$ , скорости упругой несвязанной волны сдвига в направлении, перпендикулярном к направлению поляризации  $c_{2,2}$ , здесь введены обозначения:

$$k_{15}^2 = \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S c_{44}^E}, \quad c_{2,1} = \sqrt{\frac{c_{44}^E}{\rho} (1 + k_{15}^2)}, \quad c_{2,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{\rho}}. \quad (6)$$

## 2 РЕШЕНИЕ. ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Общее решение связанных уравнений колебаний (5) следует искать в виде

$$\begin{aligned} u_x(z, t) &= \hat{u}_x(z) \exp(i\omega t), \quad u_y(z, t) = \hat{u}_y(z) \exp(i\omega t), \\ \hat{u}_x(z) &= A_1^+ \exp(ik_1 z) + A_2^+ \exp(ik_2 z) + A_1^- \exp(-ik_1 z) + A_2^- \exp(-ik_2 z), \\ \hat{u}_y(z) &= B_1^+ \exp(ik_1 z) + B_2^+ \exp(ik_2 z) + B_1^- \exp(-ik_1 z) + B_2^- \exp(-ik_2 z), \end{aligned} \quad (7)$$

где волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  вычисляются по формулам

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{2} \left( \frac{\omega^2}{c_{2,1}^2} + \frac{\omega^2}{c_{2,2}^2} \right)} \cdot \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c_{2,1}^2 c_{2,2}^2}{(c_{2,1}^2 + c_{2,2}^2)^2} \left( \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^2}}. \quad (8)$$

Здесь  $\varepsilon = \Omega_0/\omega$  – нормированная угловая скорость вращения слоя. Величины  $k_1$  и  $k_2$  по форме совпадают с корнями ранее изученного дисперсионного уравнения для плоских гармонических волн, распространяющихся перпендикулярно к оси вращения в неограниченной упругой среде [4]. Вполне естественно, что исследуемые здесь сдвиговые волны в пьезокерамическом слое подчинены тем же математическим закономерностям кориолисовой дисперсии волн. Зависимость волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$  и соответствующих им фазовых скоростей волн от угловой скорости вращения  $\varepsilon = \Omega_0/\omega$  будет такой же, как и для соответствующих корней дисперсионного уравнения в неограниченной среде. В частности, в гипотетическом случае  $\varepsilon = 1$  волновое число  $k_2$  (знак минус во внутреннем радикале) обращается в ноль,  $k_2 = 0$ , что приводит к вырождению соответствующих амплитудных слагаемых в общем решении (7). Отметим, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  волновое число  $k_2 \sim \omega/c_{2,1}$  идентифицируется как волновое число связанной электроупругой волны сдвига, а волновое число  $k_1 \sim \omega/c_{2,2}$  (знак плюс во внутреннем радикале) – как волновое число несвязанной сдвиговой волны. При малых значениях  $\varepsilon \ll 1$  имеют место асимптотические формулы

$$k_2 \simeq \frac{\omega}{c_{2,1}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{c_{2,2}^2 + 3c_{2,1}^2}{c_{2,1}^2 - c_{2,2}^2} \right], \quad k_1 \simeq \frac{\omega}{c_{2,2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{c_{2,1}^2 + 3c_{2,2}^2}{c_{2,1}^2 - c_{2,2}^2} \right], \quad (9)$$

так что значения волновых чисел при малых угловых скоростях являются близкими к соответствующим значениям, определенным для неподвижного пьезокерамического слоя, отличаясь от них на величины порядка  $\varepsilon^2$ .

Подчиняя решение (7) механическим (1) и электрическим (2) граничным условиям, в итоге получаем

$$u_x = \frac{e_{15} V_0}{c_{44}^E h} \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left\{ \left[ k_1^2 - \frac{\omega^2}{c_{2,2}^2} (1 + \varepsilon^2) \right] \frac{\cos(k_1 z)}{k_1 \cos(k_1 h)} - \left[ k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_{2,2}^2} (1 + \varepsilon^2) \right] \frac{\cos(k_2 z)}{k_2 \cos(k_2 h)} \right\} \times \cos \omega t, \quad (10)$$

$$u_y = \frac{e_{15} V_0}{c_{44}^E h} 2i\varepsilon \frac{\omega^2}{c_{2,2}^2} \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left\{ \frac{\cos(k_1 z)}{k_1 \cos(k_1 h)} - \frac{\cos(k_2 z)}{k_2 \cos(k_2 h)} \right\} \times \sin \omega t,$$

$$\tau_{zx} = e_{15} \frac{V_0}{h} \left\{ 1 \mp \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left[ \left( k_1^2 - \frac{\omega^2}{c_{2,2}^2} (1 + \varepsilon^2) \right) \frac{\sin(k_1 z)}{\sin(k_1 h)} - \left( k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_{2,2}^2} (1 + \varepsilon^2) \right) \frac{\sin(k_2 z)}{\sin(k_2 h)} \right] \right\} \times \cos \omega t, \quad (11)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2c_{44}^E} e_{15} \frac{V_0}{h} 2i\varepsilon \frac{\omega^2}{c_{2,2}^2} \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left\{ \frac{\sin(k_1 z)}{\sin(k_1 h)} - \frac{\sin(k_2 z)}{\sin(k_2 h)} \right\} \times \sin \omega t,$$

Как следует из формул (10)–(11) волновое движение в пьезокерамическом слое с продольной поляризацией характеризуется линейной комбинацией диспергирующих электромеханически связанных ( $k_2$ ) и несвязанных ( $k_1$ ) сдвиговых волн, которые распространяются между его плоскими электродированными гранями  $-h \leq z \leq h$ . Траекториями движения частиц слоя на связанных перемещениях  $u_x$  и  $u_y$  в плоскости  $z = \text{const}$  являются эллипсы с полуосями, равными амплитудным функциям при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ . Направление движения частиц на эллиптических траекториях относительно направления вращения изменяется по толщине  $-h \leq z \leq h$ , оно определяется знаками амплитуд

перемещений и было детально изучено в работе [2]. Отметим что взятые по отдельности выражения для  $u_x(z, t)$  либо  $u_y(z, t)$  физического смысла в данной задаче не имеют.

Как и следовало ожидать, касательные напряжения в направлении поляризации  $\tau_{zx}$  характеризуются линейной компонентой  $e_{15} \cdot V_0/h$  не зависящей от толщинной координаты  $z$ . Знак минус в выражении для  $\tau_{zx}$  берется при  $z < 0$ , знак плюс при  $z > 0$ . На поверхностях слоя  $z = \pm h$  оба напряжения обращаются в ноль, а максимальные значения  $\tau_{zx}$  достигаются при  $z = 0$ , в срединной плоскости слоя. В поведении волн напряжений (11) наблюдаются аналогичные закономерности (следует рассматривать обе компоненты  $\tau_{zx}, \tau_{zy}$  совместно).

Для анализа характера полученного решения (10)–(11) запишем асимптотические формулы при малых значениях угловой скорости вращения  $\varepsilon = \Omega_0/\omega \ll 1$ . Для этого следует использовать асимптотические формулы для волновых чисел  $k_1, k_2$  (9), учитывающие их изменения с точностью до  $\varepsilon^2$ . Проводя асимптотические преобразования перемещений (10) по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , в их амплитудах будем учитывать слагаемые порядка  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$ , но пренебрегать слагаемыми порядка  $\varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots$ ; в аргументах быстро осциллирующих функций  $\sin k_{1,2}z, \cos k_{1,2}z$  величинами порядка  $\varepsilon^2$  также можно пренебречь. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{u_x^{\text{ac}}}{h} \simeq & \frac{e_{15} V_0}{c_{44}^E h} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\omega z}{c_{2,1}}\right)}{\left(\frac{\omega h}{c_{2,1}}\right) \sin\left(\frac{\omega h}{c_{2,1}}\right)} + \left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{4c_{2,1}^2 c_{2,2}^2}{(c_{2,1}^2 - c_{2,2}^2)^2} \frac{\cos\left(\frac{\omega z}{c_{2,2}}\right)}{\left(\frac{\omega h}{c_{2,2}}\right) \sin\left(\frac{\omega h}{c_{2,2}}\right)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{(c_{2,1}^2 + c_{2,2}^2)^2}{(c_{2,1}^2 - c_{2,2}^2)^2} - 4 \frac{c_{2,1}^4 - 2c_{2,1}^2 c_{2,2}^2}{(c_{2,1}^2 - c_{2,2}^2)^2} \right] \frac{\cos\left(\frac{\omega z}{c_{2,1}}\right)}{\left(\frac{\omega h}{c_{2,1}}\right) \sin\left(\frac{\omega h}{c_{2,1}}\right)} \right] \right\} \times \cos \omega t, \quad (12) \\ \frac{u_x^{\text{ac}}}{h} \simeq & 2 \frac{\Omega_0}{\omega} \frac{e_{15} V_0}{c_{44}^E h} \frac{c_{2,1}^2}{c_{2,1}^2 - c_{2,2}^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\omega z}{c_{2,2}}\right)}{\left(\frac{\omega h}{c_{2,2}}\right) \sin\left(\frac{\omega h}{c_{2,2}}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\omega z}{c_{2,1}}\right)}{\left(\frac{\omega h}{c_{2,1}}\right) \sin\left(\frac{\omega h}{c_{2,1}}\right)} \right] \times \sin \omega t, \end{aligned}$$

Из этих асимптотических формул видно, что основной вклад в амплитуду перемещений вносит не зависящее от угловой скорости  $\Omega_0$  слагаемое в компоненте  $u_x$  в виде связанной гармонической сдвиговой волны (скорость  $c_{2,1}$  в аргументе  $\cos$ ), которое представляет собой элементарное решение для перемещений  $u_x$  в случае неподвижного слоя,  $u_y \equiv 0$  при  $\Omega_0 = 0$ . Это основное слагаемое слабо искажается слагаемым второго порядка малости  $(\Omega_0/\omega)^2$  в виде суммы электромеханически связанной  $c_{2,1}$  и не связанной  $c_{2,2}$  волн. Перемещения  $u_y$  по величине являются существенно меньшими от перемещений  $u_x$ . Оба слагаемых связанной и несвязанной сдвиговых волн имеют порядок малости  $\Omega_0/\omega$ , т.е. перемещения  $u_y$  оказались прямо пропорциональными значению угловой скорости вращения. Этот результат может быть использован при разработке датчиков угловой скорости вращения. Асимптотические формулы для напряжений записываются аналогично.

### 3 РЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТОТЫ

Из решения (10)–(11) следует, что резонансные колебания слоя имеют место тогда, когда знаменатели в амплитудах перемещений и напряжений обращаются в ноль:  $\sin k_1 h = 0$ ,  $\sin k_2 h = 0$ . Этим определяются две последовательности волновых чисел  $k_1^{(n)} = (n\pi)/h$  и  $k_2^{(m)} = (m\pi)/h$ , ( $n, m = 0, 1, 2 \dots$ ), причем каждой из них соответствует по две последовательности резонансных частот колебаний  $\omega_{1,2}^{(n)}$  и  $\omega_{1,2}^{(m)}$ , которые получаются из решения биквадратных частотных уравнений, в общем случае – четыре серии частот. Например, когда  $\Omega_0 < (n\pi/h)c_{2,2}$  либо  $\Omega_0 > (n\pi/h)c_{2,1}$  значения  $\omega_{1,2}^{(n)}$  находятся в виде

$$\omega_{1,2}^{(n)} = c_{2,2} \frac{n\pi}{h} \sqrt{\frac{c_{2,1}^2 + c_{2,2}^2}{2c_{2,2}^2} + \epsilon_n^2} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c_{2,1}^2 c_{2,2}^2}{(c_{2,1}^2 + c_{2,2}^2)^2} \frac{\left(1 - \frac{c_{2,2}^2}{c_{2,1}^2} \epsilon_n^2\right) (1 - \epsilon_n^2)}{\left(1 + \frac{2c_{2,2}^2}{c_{2,1}^2 + c_{2,2}^2} \epsilon_n^2\right)^2}}, \quad (13)$$

где для нормированной угловой скорости введено обозначение  $\epsilon_n = (n\pi)^{-1} h \Omega_0 / c_{2,2}$ . При этом частоты  $\omega_1^{(n)}$  (знак плюс во внутреннем радикале) являются резонансными частотами электромеханически связанных сдвиговых колебаний, а  $\omega_2^{(n)}$  (знак минус во внутреннем радикале) – резонансными частотами электромеханически несвязанных сдвиговых колебаний. Следует отметить, что для угловых скоростей вращения в интервале  $(n\pi/h)c_{2,2} < \Omega_0 < (n\pi/h)c_{2,1}$  частоты  $\omega_2^{(n)}$  становятся чисто мнимыми. Это свидетельствует, что резонансные колебания вращающегося пьезокерамического слоя могут характеризоваться не только гармоническими слагаемыми, но и слагаемыми с экспоненциальным затуханием во времени. Однако элементарный расчет показывает, что такое anomальное экспоненциальное поведение функций решения во времени для слоя толщины  $2h = 1$  см возможно лишь при значениях  $\Omega_0 \sim 10^6$  об/с и в практическом применении датчиков угловой скорости наблюдаться не будет.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Сарпулов С. А., Улитко И. А. Влияние вращения на объемные волны в упругой среде и их использование в твердотельной гироскопии // Гироскопия и навигация.– 2001.– **35**, N 4.– С. 64–72.
2. Борисейко О. В., Малик А. М., Улитко И. А. Гармонічні хвилі зсуву в пружному шарі, який рівномірно обертається // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: Математика і механіка.– 2004.– **11–12**.– С. 105–110.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость.– К: Наукова Думка: 1989, 279.
4. Улитко И. А. Дисперсия проских гармонических волн в равномерно вращающемся упругом пространстве // Доклады НАН Украины.– 1995.– N 1.– С. 54–57.