

К ДИНАМИКЕ СЛОЖНОЙ РОТОРНОЙ КОНСТРУКЦИИ НА БАЗЕ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ФУЦЗЯН ЯН, А. Ф. УЛИТКО

*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
ул. Владимирская, 64, 01033, Киев-033, Украина
тел. (044) 259-03-07; e-mail: fujiang@univ.kiev.ua, ulitko@univ.kiev.ua*

Проанализированы простейшие случаи колебаний двухслойной оболочки ротора центрифуги, найдены соответствующие низшие резонансные частоты, которые могут оказаться близкими к угловой скорости вращения. Изучена радиальная деформация кольцевых пластин переменной толщины (элементы ротора) и проведен сравнительный анализ взаимного деформирования элементов конструкции во время вращения с заданной угловой скоростью.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с требованиями, выдвигаемыми к трубчатым центрифугам [1] на практике, являются важными сведения о нормальных модах и частотных спектрах колебаний, которые могут возникать в роторе центрифуги, представляющем двухслойную цилиндрическую оболочку. Необходимость предварительного расчета амплитудно-частотных характеристик оболочки, даже без учёта кориолисовых эффектов в собственных колебаниях, следует из того, что угловая скорость ротора, т.е. частота вращения конструкции и низшие частоты колебаний зачастую находятся в непосредственной близости одна от другой. Благодаря физической связанности двух типов движения — вращательного и упругих колебаний, в конструкции центрифуги могут возникнуть опасные динамические режимы, которые могут привести к потере устойчивости движения или даже к разрушению конструкции ротора.

В связи с этим нами проведен анализ частот стационарных колебаний двухслойной цилиндрической оболочки, соответствующих различным модам ее деформирования: изгибные колебания вдоль оси, крутильные колебания вокруг оси, окружные колебания, продольные и радиальные колебания. Определены соответствующие этим типам деформации низшие резонансные частоты, которые могут оказаться близкими по величине к угловой скорости вращения. При постановке задачи нами получены уравнения колебаний в прогибах при точном учете приведенных жесткостных характеристик и при специальном задании срединной поверхности. Эти уравнения характеризуются также и учетом влияния растяжения срединной поверхности на изгиб.

Другой важной задачей является анализ взаимного деформирования элементов конструкции ротора, включающий данные об амплитудах перемещений его частей: двухслойной оболочки, пластин переменной толщины и др. для оценки возможных напряжений в сечениях сочленения в рабочем режиме. Эти результаты также приведены в предлагаемом докладе.

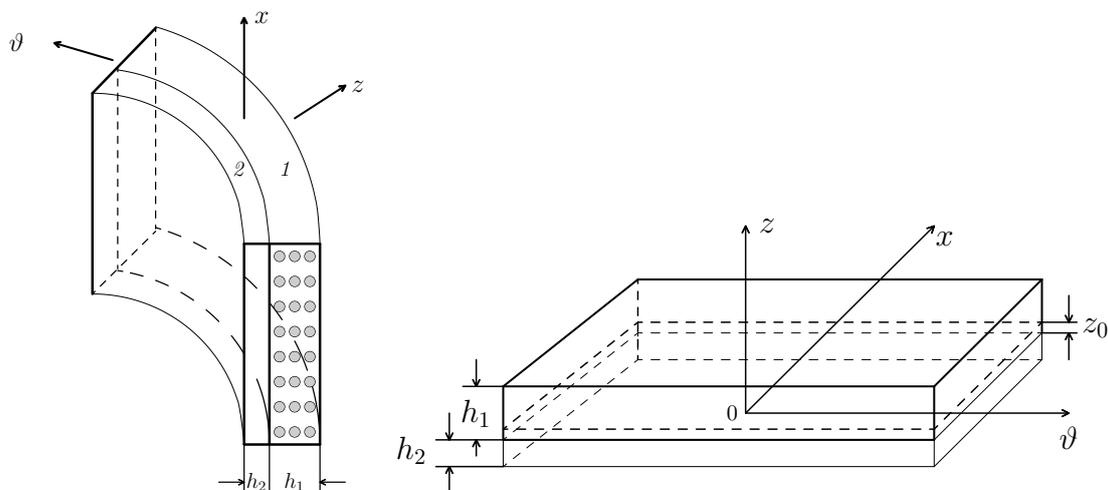


Рис. 1. Двухслойный анизотропный элемент ротора центрифуги

1 СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Двухслойная цилиндрическая оболочка ротора центрифуги изготовлена из разных по толщине слоев: внутренний слой (1) — алюминий, изотропный материал; а внешний армирующий слой (2) — стекловолоконная намотка, трансверсально-изотропный композитный материал (см. рис. 1). Вследствие этого для вывода уравнений колебаний и формулировки граничных условий и условий сопряжения следует использовать материальные соотношения упругой деформации

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta}^{(1)} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} [(\varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2) - (z - z_0) (\chi_{\vartheta} + \nu_1 \chi_x)], \\ \sigma_x^{(1)} &= \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} [(\varepsilon_2 + \nu_2 \varepsilon_1) - (z - z_0) (\chi_x + \nu_2 \chi_{\vartheta})], \\ \tau_{x\vartheta}^{(1)} &= G_{1,2} [\gamma_{12} - (z - z_0) 2 \chi_{\vartheta x}],\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta}^{(2)} &= \frac{E}{1 - \nu^2} [(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) - (z - z_0) (\chi_{\vartheta} + \nu \chi_x)], \\ \sigma_x^{(2)} &= \frac{E}{1 - \nu^2} [(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) - (z - z_0) (\chi_x + \nu \chi_{\vartheta})], \\ \tau_{x\vartheta}^{(2)} &= G [\gamma_{12} - (z - z_0) 2 \chi_{\vartheta x}],\end{aligned}\quad (2)$$

рассчитанные по наперед неизвестному значению z_0 срединной поверхности двухслойного элемента [2]

$$z_0 = \frac{1}{2} h_1 \frac{1 - \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 - \nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2^2}{h_1^2}}{1 + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 - \nu^2} \frac{h_2}{h_1} \frac{E}{E_2}}.\quad (3)$$

В формулах (1)–(3) величины обозначенные индексом 1 относятся к стекловолоконной намотке, а обозначенные индексом 2 – к алюминиевой основе.

После осреднения напряжений по толщине слоев h_1, h_2 были получены весьма громоздкие выражения для перерезывающих сил, моментов, изгибных жесткостей, коэффициента Пуассона и т.п., приведенные к значению z_0 (3). С использованием условий баланса сил моментов была получена следующая общая система уравнений колебаний двухслойной оболочки в прогибах u, v, w ($\xi = x/b$ – безразмерная осевая координата)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{G^*(h_1 + h_2)}{D_N^{(0)}} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \left(\nu + \frac{G^*(h_1 + h_2)}{D_N^{(0)}} + \frac{2g^*}{bD_N^{(0)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \vartheta} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} + \\
 & \quad + \frac{2g^*}{bD_N^{(0)}} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \vartheta^2} = \frac{b^2}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 & \left(\nu \nu^* + \frac{G^*(h_1 + h_2)}{D_N^{(1)}} - \frac{g^*}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \vartheta} + \left(\frac{G^*(h_1 + h_2)}{D_N^{(1)}} + \frac{g^*}{bD_N^{(1)}} + \frac{\tilde{G}(h_1 + h_2)^3}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \\
 & \quad + \left(1 - \frac{2d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} + \frac{D_M^{(1)}}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} - \left(1 - \frac{d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \left(\frac{D_M^{(1)}}{b^2 D_N^{(1)}} - \frac{d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \vartheta^3} + \\
 & \quad + \left(\nu \frac{D_M^{(0)}}{b^2 D_N^{(1)}} + \frac{\tilde{G}(h_1 + h_2)^3}{D_N^{(1)}} + \frac{2g^*}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \vartheta} = \frac{b^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 & \quad \nu \nu^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - w - \frac{2d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} - \frac{D_M^{(0)}}{b^2 D_N^{(1)}} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \\
 & \quad - 2 \left(\nu \frac{D_M^{(0)}}{b^2 D_N^{(1)}} + \frac{\tilde{G}(h_1 + h_2)^3}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \vartheta^2} - \frac{D_M^{(1)}}{b^2 D_N^{(1)}} \frac{\partial^4 w}{\partial \vartheta^4} + \frac{2g^*}{bD_N^{(1)}} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \vartheta^2} + \\
 & \quad + \left(\frac{2g^*}{bD_N^{(1)}} - 2 \frac{\tilde{G}(h_1 + h_2)^3}{b^2 D_N^{(1)}} - \nu \frac{D_M^{(0)}}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \vartheta} - \left(\frac{D_M^{(1)}}{b^2 D_N^{(1)}} - \frac{d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \vartheta^3} - \\
 & \quad - b \left(\frac{\Omega_0 b}{c_1} \right)^2 = \frac{b^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Важно подчеркнуть, что записанные уравнения учитывают влияние растяжения срединной поверхности, чем и обусловлено наличие третьих производных по координатам в их левых частях, в уравнение для радиальных прогибов входит слагаемое растяжения от центробежной силы. Значения коэффициентов в этих уравнениях весьма громоздки. Например, скорости волн в осевом (c_2) и окружном (c_1) направлениях равны

$$c_1^2 = \frac{E_1}{\rho_1(1 - \nu_1 \nu_2)} \frac{1 + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 - \nu^2} \frac{E}{E_1} \frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{\rho}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1}}, \quad c_2^2 = \frac{E_2}{\rho_1(1 - \nu_1 \nu_2)} \frac{1 + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 - \nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{\rho}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1}}, \tag{5}$$

В общем случае изгибных колебаний решение уравнений (4) выбираем в виде

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \vartheta, t) &= \tilde{u}(\xi, t) \cos \vartheta, & v(\xi, \vartheta, t) &= \tilde{v}(\xi, t) \sin \vartheta, & w(\xi, \vartheta, t) &= \tilde{w}(\xi, t) \cos \vartheta, \\
 \tilde{u}(\xi, t) &= A \sin \lambda \xi e^{i\omega t}, & \tilde{v}(\xi, t) &= B \cos \lambda \xi e^{i\omega t}, & \tilde{w}(\xi, t) &= C \cos \lambda \xi e^{i\omega t}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Из граничных условий на торцах оболочки $\xi = \pm l/b$: $N_x|_{\xi=\pm l/b} = 0$ находим

$$\begin{aligned} \frac{N_x}{D_N^{(0)}} \Big|_{\xi=\pm l/b} &= \frac{1}{b} [\lambda A + \nu(B - C)] \cos\left(\frac{\lambda l}{b}\right) \cos\vartheta \cdot e^{i\omega t} = 0, \\ \cos\left(\frac{\lambda l}{b}\right) &= 0, \quad \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi b}{l}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда собственные частоты колебаний $\omega_i^{(n)}$ ($i=1,2,3$) находятся по значениям λ_n из условия равенства нулю определителя системы (4). Для нескольких первых нормальных мод изгибных колебаний их натуральные значения $\nu_i^{(n)} = (2\pi)^{-1}\omega_i^{(n)}$ приведены в табл. 1. При этом внешний радиус оболочки $b = 15$ см, ее длина $l = 30$ см и использовались стандартные значения материальных констант алюминия и стекловолоконной намотки [3].

Табл. 1

n	ν_1 , Гц	ν_2 , Гц	ν_3 , Гц
0	2174.63	8509.67	32738.42
1	5727.25	15030.94	33333.59
2	9749.99	22836.46	34579.02
3	13207.12	31254.09	36416.23

Видно, что значение частоты осевого изгибного резонанса $\nu_1^{(0)} = 2174.63$ Гц является сравнительно низким и при достаточно больших скоростях вращения оболочки может быть критическим, при этом серии резонансных частот $\nu_2^{(n)}$ и $\nu_3^{(n)}$ не являются критическими.

В случае крутильных колебаний оболочки со свободными торцами кососимметричное относительно $\xi = 0$ решение уравнений (4) представляется в виде

$$\begin{aligned} v(\xi, t) &= \hat{v}(\xi) \cdot e^{i\omega t}, \quad \chi^2 \frac{d^2 \hat{v}}{d\xi^2} + \left(\frac{\omega b}{c_1}\right)^2 \hat{v} = 0, \quad \frac{d\hat{v}}{d\xi} \Big|_{\xi=\pm l/b} = 0, \\ \hat{v}(\xi) &= C_n \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi b}{l} \xi \right], \quad \omega_n = \chi \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c_1}{l}, \quad \nu_n = \chi \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_1}{2l}, \end{aligned} \quad (8)$$

Подсчитанные по этим формулам значения резонансных частот на первых трех модах равны, соответственно: $\nu_0 = 3132$ Гц, $\nu_1 = 9414$ Гц, $\nu_2 = 15689$ Гц. Даже в случае достаточно большой угловой скорости вращения эти частоты не являются критическими.

В случае продольных колебаний оболочки, симметричных относительно $\xi = 0$, при условиях свободных торцев ($N_x = 0$, $x = \pm l$) имеем

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= \hat{u}(\xi) \cdot e^{i\omega t}, \quad \frac{d^2 \hat{u}}{d\xi^2} + \left(\frac{\omega b}{c_2}\right)^2 \hat{u} = 0, \quad \frac{d\hat{u}}{d\xi} \Big|_{\xi=\pm l/b} = 0, \\ \hat{u}(\xi) &= A_n \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi b}{l} \xi \right], \quad \omega_n^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c_2}{l}, \quad \nu_n^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_2}{2l}. \end{aligned} \quad (9)$$

Значения резонансных частот на первых трех продольных модах равны, соответственно: $\nu_0 = 2102$ Гц, $\nu_1 = 6306$ Гц, $\nu_2 = 10510$ Гц. Отметим, что в случае колебаний с одним

защемленным торцем значения этих частот уменьшаются в два раза: $\nu_n^{(2)} = \frac{1}{2}\nu_n^{(1)}$. Хотя нормальные моды для этого типа деформации и не испытывает изменений за счет кориолисовых ускорений, полученные данные для резонансных частот следует учитывать при расчете других элементов конструкции — верхней и нижней опор центрифуги, в которых следует предусмотреть средства динамической стабилизации от продольных ускорений и нагрузок.

Таким же образом был проведен элементарный расчет радиальных колебаний оболочки (прогибы w). Низшая резонансная частота колебаний этого типа оказалась равной $\nu_0 = 24\,119$ Гц и не является критической.

2 РАДИАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ В СВОБОДНОМ ВРАЩЕНИИ

Прилегающие к торцам двухслойной оболочки кольцевые пластины переменной толщины изготовлены из изотропного упругого материала (постоянные E и ν), их внешний и внутренний радиусы b и a , толщины по контуру h_1 и h_0 показаны на рис. 2.

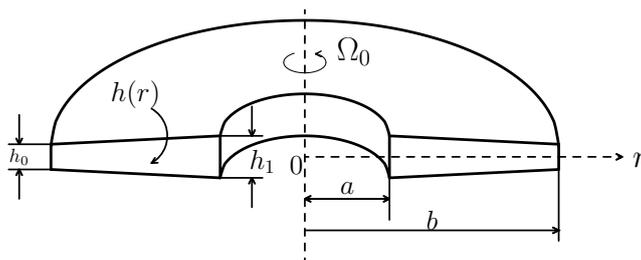


Рис. 2. Кольцевая пластина переменной толщины

При вращении центрифуги с постоянной угловой скоростью Ω_0 деформация пластины будет осесимметричной и ее перемещения будут чисто радиальными $u_r = u(r)$. Уравнение для этих радиальных перемещений запишем в виде

$$\left(r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u \right) - \frac{r(h_0 - h_1)}{(bh_0 - ah_1) - r(h_0 - h_1)} \left(r \frac{du}{dr} + \nu u \right) + \frac{\Omega_0^2}{c^2} r^3 = 0, \quad (10)$$

где $c = \sqrt{E/[\rho(1 - \nu^2)]}$ — расчетная скорость продольных волн. Аналитическое решение нелинейного уравнения второго порядка (10) является достаточно сложным. Оно было получено в посредством ряда подстановок и громоздких выкладок в виде

$$\frac{u}{a} = \left(\frac{\Omega_0 a}{c} \right)^2 \left\{ \frac{e^t}{11 + \nu} \left[3\kappa^2 \frac{3 + \nu}{(1 + \nu)(5 + \nu)} + \kappa \frac{3 + \nu}{5 + \nu} e^t - e^{2t} \right] + A\psi(t) + Bg(t) \right\}, \quad (11)$$

где κ — геометрический параметр, $\psi(t)$ и $g(t)$ — некоторые вещественные аналитические функции, A и B — константы, определяемые из граничных условий на контурах пластины $N_r|_{r=a}$ и $N_r|_{r=b}$, т.е. в сечениях сопряжения с другими элементами конструкции центрифуги.

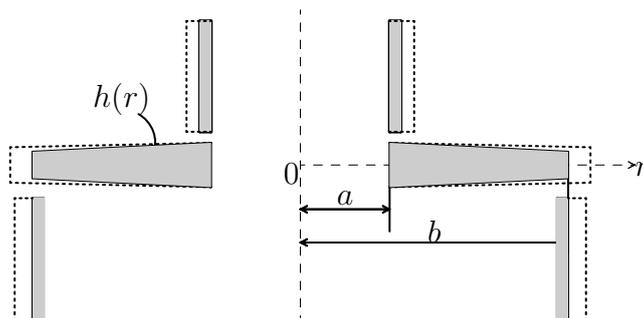


Рис. 3. Радиальна деформація елементів конструкції в свободному вращенні

Верная формулировка условий сопряжения является нетривиальной задачей и выходит за рамки этого краткого сообщения. Однако был выполнен предварительный расчет деформаций и взаимных перемещений различных элементов конструкции только под действием центробежных сил, не учитывая их собственные колебания. На рис. 3 показаны сопрягающиеся элементы центрифуги: патрубок, пластина переменной толщины и армированная оболочка, а в табл. 2 приведены значения радиальных перемещений и деформаций в зависимости от величины угловой скорости.

Табл. 2

Ω_0		10^4 об/мин	$5 \cdot 10^4$ об/мин	10^5 об/мин
Патрубок (железо)	ε_{ϑ}	$0.395 \cdot 10^{-4}$	$0.987 \cdot 10^{-3}$	$0.395 \cdot 10^{-2}$
	$u_{\text{рад}}$	1.875 мкм	29.6 мкм	118.5 мкм
Пластина переменной толщины	$u _{r=a}$	6.67 мкм	166.7 мкм	667 мкм
	$u _{r=b}$	3.80 мкм	95.0 мкм	380.0 мкм
Пластина постоянной толщины	$u _{r=a}$	5.36 мкм	134.0 мкм	536.0 мкм
	$u _{r=b}$	4.65 мкм	116.0 мкм	464.0 мкм
Армированная оболочка	ε_{ϑ}	$0.5 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$
	$u_{\text{рад}}$	3.4 мкм	85 мкм	340 мкм

Следует отметить, что перемещения на внутреннем $a = 5$ см и внешнем $b = 15$ см радиусах пластины переменной толщины оказываются меньшими, чем в пластине постоянной толщины и более согласованными с радиальными перемещениями армированной оболочки и патрубка, что оправдывает ее применение в конструкции центрифуги.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лукьяненко В. М., Таранец А. В. Центрифуги: Справочное издание. – М: Химия: 1988, 384.
2. Ян Фуцзян Про визначення нейтральної „серединної“ площини двохшарового пружного елементу // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – N 3. – С. 125–129.
3. Болтон. У. Конструкционные материалы, металлы, сплавы полимаеры, керамика, композиты: Справочное издание. – К: Додэка: 2007, 320.