

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В МАГНИТОУПРУГОМ ТЕЛЕ С ПУСТОТАМИ

**И.Т. СЕЛЕЗОВ, док. физ.- мат. наук, проф.**

*Институт гидромеханики НАНУ, 03680, Киев, Желябова, 8/4*

### ВВЕДЕНИЕ

Модель деформируемого упругого тела с пустотами [8, 13, 14] обобщается здесь таким образом, чтобы учесть магнитоупругие эффекты. Предполагается, что среда электропроводящая и подвержена действию внешнего магнитного поля, пустотная фракция мала по сравнению с упругой матрицей, внутри пустот среда непроводящая [1].

До настоящего времени рассматривались некоторые динамические задачи без магнитоупругих взаимодействий [5,8-11, 14-17]. В [12, 18] рассмотрены вопросы построения общих решений.

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ.

Уравнения записаны в рационализованной системе МКС (Джексон, 1962, стр. 677) [7]:

уравнение движения упругой матрицы

$$G\nabla^2\vec{u} + (\lambda + G) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \beta \nabla \eta = \rho_1 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \vec{J} \times \vec{B}, \quad (1)$$

уравнение движения пустотной фракции

$$\alpha \nabla^2 \eta - \omega \frac{\partial \eta}{\partial t} - \xi \eta - \beta \nabla \cdot \vec{u} = \rho_1 k \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (2)$$

уравнение индукции

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \vec{H} + \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H} \right), \quad (3)$$

уравнения Максвелла

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_c, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)$$

конститутивные уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} + \beta \eta \delta_{ij}, \quad h_i = \alpha \eta_{,i}, \quad g = -\omega \eta - \xi \eta - \beta \varepsilon_{kk}, \\ \varepsilon_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

тензор Максвелла

$$T_{ij} = H_i B_j + E_i D_j - \delta (H_k B_k + E_k D_k) / 2. \quad (6)$$

В отличие от обычной модели магнитоупругости, система уравнений (1)–(6) включает уравнение (2), описывающее пустотную фракцию  $\eta$ , и в него входит член  $\beta \nabla \cdot \vec{u}$ , соответствующий дилатационному векторному полю, а в уравнение

эластодинамики (1) входит член  $\beta \bar{\nabla} \eta$ , соответствующий пустотной фракции. Без учета магнитоупругих взаимодействий система уравнений (1), (2) гиперболического типа, общая система разрешающих уравнений (1) – (5) оказывается связанной гиперболо-параболической в связи с диссипацией, обусловленной конечной электропроводностью. В системе (1) – (5) подчеркнуты члены нелинейного и упругопористого взаимодействий.

В случае физически и геометрически нелинейной теории необходимо привлекать конститутивные уравнения вида [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 3K (\hat{\varepsilon}_0) \hat{\varepsilon}_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_{ii} - \hat{\varepsilon}_0) + \beta\eta, \\ \sigma_{ik} &= G\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_{ik}, \quad i \neq k, \quad \varepsilon_{ij} = 0.5(U_{i,j} + U_{j,i} + \underline{U_{m,i}U_{m,j}}), \\ B &= \mu_0(\bar{H})H_i, \quad D_i = \varepsilon_0 E_i, \quad J_i = \sigma(E_i + \underline{\varepsilon_{ijk}\dot{U}_j B_k}). \end{aligned} \quad (7)$$

В случае, когда среда (ориентированная в прямоугольной декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$ ) подвержена действию сильного постоянного однородного магнитного поля  $H_{20}$ , система уравнений (1) - (5) и выражение (6) линейризуются [1] относительно невозмущенного состояния, аналогично тому, как это реализуется в случае МГД-среды и магнитоупругой среды [3].

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Рассмотрим распространение плоских сдвиговых волн (Рис.1).

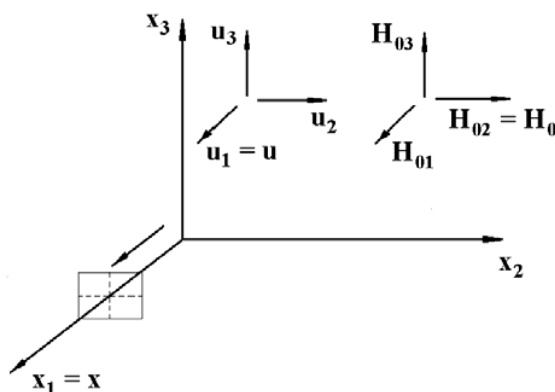


Рис. 1

В этом случае линейризованная система уравнений (1) – (5) без учета токов смещения может быть представлена в виде трех связанных разрешающих уравнений в безразмерной форме [6]:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = P_H \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \omega \frac{\partial \eta}{\partial t} - \xi \eta = \beta \alpha^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial h_2}{\partial t} = - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t}. \quad (10)$$

Здесь введены безразмерные величины (звездочки в изложении опущены)

$$\begin{aligned} \bar{x}^* &= \frac{\bar{x}}{l}, & t^* &= \frac{c_s}{l} t, & \bar{u}^* &= \frac{\bar{u}}{l}, \\ \bar{H}^* &= \frac{\bar{H}}{H_{20}}, & (\sigma_{ik}^*, T_{ik}) &= \frac{1}{\rho_1 c_s^2} (\sigma_{ik}, T_{ik}), & \beta^* &= \frac{\beta}{G}, \\ \omega^* &= \frac{\omega}{\alpha} c_s l, & \xi^* &= \frac{\xi l^2}{\alpha}, & \alpha^* &= \frac{\alpha}{G l^2}, \\ c_s^* &= 1, & c_v^* &= \frac{c_v}{c_s} = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_1 k}}, & P_H^s &= \frac{\mu H_0^2}{\rho_1 c_s^2}, & R_m^s &= c_s l \mu \sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае идеальной электропроводности (магнитное число Рейнольдса  $R_m \rightarrow \infty$ ), гипербола-параболическая система уравнений вырождается в гиперболическую и в отличие от обычной модели магнитоупругости описывает распространение еще одного типа волн, связанного с наличием пустотной фракции  $\eta$ . При этом магнитоупругие волны и волны, соответствующие пустотной фракции, оказываются связанными, и даже при  $R_m \rightarrow \infty$  система не сводится к уравнениям иерархической структуры, как это имеет место в классической магнитоупругости.

В случае распространения плоских монохроматических волн  $u(x, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$  в терминах “фазовая скорость  $c_p$  - длина волны  $\lambda$ ”  $\left( k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = \frac{2\pi}{\lambda} c_p \right)$  из системы (8) – (11) получаем дисперсионное уравнение

$$D(c_p(\lambda), \lambda) = 0, \quad (12)$$

которое после разделения действительной и мнимой частей сводится к двум связанным уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} D &= c_p^4 \left\{ \frac{4\pi^2}{c_v^2 R_m^s c_s^2} \lambda^{-2} - \frac{v_1}{c_s^2} \right\} + c_p^2 \left\{ -\frac{4\pi^2}{R_m^s} \left( \frac{1}{c_p^2} + \frac{1}{c_v^2} \right) \lambda^{-2} + v_1 (1 + P_H^s v_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_2}{R_m^s c_s^2} \right\} + c_p \frac{v_0 v_3}{R_m^s} + \left\{ \frac{4\pi^2}{R_m^s} \lambda^{-2} + \frac{v_2}{R_m^s} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} D = c_p^4 \frac{1}{c_s^2 c_v^2} + c_p^2 \left\{ \frac{v_1}{c_s^2 R_m^s} - \frac{1}{c_s^2} - \frac{v_2}{c_s^2 4\pi^2} \cdot \lambda^2 - \right. \\
 \left. - \frac{1}{2\pi c_v^2} \lambda - P_H^s \frac{1}{c_v^2} \right\} + c_p \frac{v_0 v_3}{4\pi^2} \lambda^2 + \\
 + \left\{ -\frac{v_1}{R_m^s} + 1 + P_H^s + \left( \frac{v_2}{4\pi^2} + P_H^s \frac{v_2}{4\pi^2} \right) \lambda^2 \right\} = 0.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнений (13), (14) видно сильное влияние электропроводности  $R_m^s \sim \sigma$  и магнитного поля  $P_H^s \sim H_0^2$  и связанности полей упругости (матрица) и пористой фракции,  $v_0 = \beta$ ,  $v_1 = \omega$ ,  $v_2 = \xi$ ,  $v_3 = \beta\alpha^{-1}$ .

### ДИФРАКЦИЯ МАГНИТОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА УПРУГОМ ПОРИСТОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРЕПЯТСТВИИ

Исследуется распространение цилиндрических волн от излучателя в магнитоакустической среде, которые дифрагируют на упругом пористом магнитоупругом цилиндре (Рис. 2). Уравнения в цилиндрической системе координат, связанной с рассеивателем, записываются в виде:

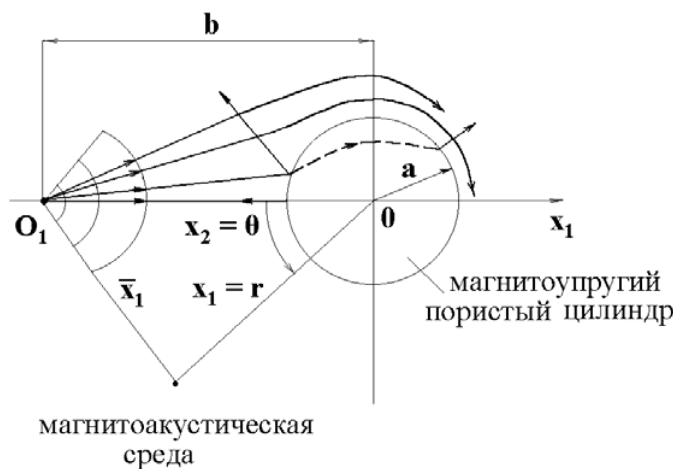


Рис. 2

для внешней магнитоакустической среды [2]

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial g}{\partial x_1} - P_H R_m v_1, \quad \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} = -c_0^2 \frac{1}{x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - P_H R_m v_2, \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{1}{x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1 x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \right] = 0, \\
 \frac{1}{x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_1 x_1) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \right] = 0, \quad \frac{1}{x_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} = v_2, \quad \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = v_1, \\
 \frac{1}{x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (e_1 x_1) + \frac{\partial e_2}{\partial x_2} \right] = 0.
 \end{aligned} \quad (15)$$

для магнитоупругого пористого цилиндра (матрицы) [6]

$$\begin{aligned}
 G \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial r} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial r} - \rho \ddot{u}_r + (\vec{J} \times \vec{B})_r &= 0, \\
 G \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + (\lambda + G) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \rho \ddot{u}_\theta + (\vec{J} \times \vec{B})_\theta &= 0, \\
 G \nabla^2 u_z + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial z} - \rho \ddot{u}_z &= 0, \\
 e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Условия сопряжения, отнесенные к невозмущенной поверхности раздела двух сред 1 и 2  $x_1 = 1$

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \cdot (\vec{V}^1 - \vec{V}^2) &= 0, \quad [(\sigma_{ik}^1 + T_{ik}^1) - (\sigma_{ik}^2 + T_{ik}^2)] n_i = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, \\
 \vec{n} \cdot \left( \frac{\mu^1}{\mu^2} \vec{H}^1 - \vec{H}^2 \right) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}^1 - \vec{H}^2) = 0, \\
 \vec{n} \cdot \left( \frac{\mu^1}{\mu^2} \vec{E}^1 - \vec{E}^2 \right) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{E}^1 - \vec{E}^2) = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Для определения вида излучаемой волны сначала решается задача излучения в системе координат  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ , связанной с излучателем. Искомые функции представляются в виде  $f(x_1, x_2, x_3, t) = f^*(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}$ .

В предельном случае жесткого цилиндра получаем приближенные выражения для плотности  $\rho$

$$\begin{aligned}
 \text{Re } \rho = -2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{P_H R_m}{\rho_0 c_0} (b + x_1) \right] \left[ 1 + \frac{1}{16} \left( \frac{P_H R_m}{\omega \rho_0} \right) \right]^{-2} \times \\
 \times \left( \cos kb - \frac{P_H R_m}{\omega \rho_0} \sin kb \right) (1 + 2 \cos x_2),
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \rho = -2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{P_H R_m}{g_0 c_0} (b + x_1) \right] \left[ 1 + \frac{1}{16} \left( \frac{P_H R_m}{\omega \rho_0} \right) \right]^{-2} \times \\
 \times \left( \sin kb - \frac{P_H R_m}{\omega \rho_0} \cos kb \right) (1 + 2 \cos x_2).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Из выражений (18) и (19) можно установить сильное влияние на дифрагированное поле эффектов диссипации, расстояния от излучателя  $b$ , волнового числа  $kb$  и  $P_H R_m$ .

## ВЫВОДЫ

1. Представлена континуальная модель магнитоупругой пористой среды, описывающая взаимодействие магнитоупругого поля с полем пористой фракции.
2. Проведена линеаризация и система уравнений сведена к трем разрешающим уравнениям.

3. Рассмотрена задача о распространении плоских волн и проведен качественный анализ дисперсионного уравнения. Показано сильное влияние магнитоупругих эффектов и пористости на распространение волн.
4. Приведена постановка новой задачи дифракции магнитоакустических волн на магнитоупругом пористом цилиндре и представлен качественный анализ в предельном случае жесткого цилиндра.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Селезов И. Т. Линеаризованные уравнения движения магнитоупругих сред с пустотами // Тезисы докладов 2-й Всесоюзной конференции «Механика неоднородных структур», Ч. 2. (Львов), 17-19 сентября 1991, Львов, 1991. – С. 36.
2. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Стационарна задача розсіяння циліндричної магнитоакустичної хвилі на ідеальнопровідному циліндрі // Доповіді АН УРСР. Серія А. - 1971. - N 2. – С. 169-173.
3. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Волны в магнитогидроупругих средах. – Киев: Наукова думка, 1975. – 164 с.
4. Selezov I. T. Mathematical model of nonlinear magnetoelastic solid with voids // Тезисы докладов Украинской конференции “Моделирование и исследование устойчивости систем”, Киев, 15-19 мая 1995. – С. 106.
5. Selezov I. T., Avramenko O. V. Wave propagation in an elastic layer with voids located in an elastic layer with voids located in a liquid // J. Math. Sciences. - 1998. - **88**, N 3. - P. 400-406.
6. Selezov I. T. Wave processes in fluids and elastic media // Int. J. Fluid Mechanics Research. - 2003. - **30**, N 2. – P. 219-249.
7. Jackson J. D. Classical electrodynamics. – New York – London: John Wiley & Sons, Inc. – 1962. - Русский перевод: Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Мир, 1965. – 703 с.
8. Nunziato J. W., Cowin S. C. A nonlinear theory of elastic materials with voids // Archive Rational Mechanics and Analysis – 1979. – 72. – P. 175-202.
9. Chandrasekharalah D. S. Effects of surface stresses and voids on rayleigh waves in an elastic solid // Int. J. Engng Sci. – 1987. – Vol. 25, N 2. – P. 205-211.
10. Chandrasekharalah D. S. Rayleigh-lamb waves in an elastic plane with voids // J. Applied Mechanics. – 1987. – Vol. 54. – P. 509-512.
11. Chandrasekharalah D. S. Complete solutions in the theory of elastic materials with voids // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1987. – 40, Pt. 3. – P. 401-414.
12. Ciarletta M. A solution of Galerkin type in the theory of thermoelastic materials with voids // J. Thermal Stresses. – 1991. – 14. – P. 409-417.
13. Cowin S. C., Nunziato J. W. Linear elastic materials with voids // J. Elasticity. – 1983. - 13. – P. 125-147.

14. *Cowin S. C.* Thermodynamic model for porous materials with vacuous pores // *J. Applied Physics* – 1972. – Vol. 43, N 6. – P. 2495-2497.
15. *Nunziato J. W., Walsh K.* On the influence of void compaction and material non-uniformity on the propagation of one-dimensional acceleration waves in granular materials // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1977. – 64, N 4. – P. 299-316.
16. *Nunziato J. W., Waish E. K.* Small-amplitude wave behavior in one-dimensional granular solids // *J. Applied Mechanics*. – 1977. – P. 559-564.
17. *Scalia A.* Shock waves in viscoelastic materials with voids // *Wave Motion*. – 1994. – 19. – P. 125-133.
18. *Scarpetta E.* On the fundamental solutions in micropolar elasticity with voids // *Acta Mechanica*. – 1990. – 82. – P. 151-158.