СИСТЕМА УРАВНЕНИИЙ АЭРОАКУСТИКИ ДЛЯ СРЕДЫ С ЗАВИХРЕННОСТЬЮ: ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

ПЕТР В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев,тел.:453-26-60

A critical review of methods for study sound spreading within inhomogeneous medium with vortices has been done. The main shortcomings of Blohintzev approach, Lighthill and Howe theories have been shown. Lighthill theory, in fact, does not take into account inhomogeneous properties of medium when sound is spreading within it. Lighthill's and Howe's equations have been deduced not for small disturbances of medium but only for hydrodynamical ones. Blohintzev' system of equations includes both hydrodynamical variable and their disturbances. However it has more variables than equations, i.e. cannot be solved correctly. In the paper a system of equations for aeroacoustics of inhomogeneous inviscous medium with vorticity has been deduced. A scheme of overall aerodynamical-aeroacoustical problem solution is explained.

ВВЕДЕНИЕ

Современные модели исследования звука аэродинамического происхождения условно можно разделить на два класса: 1) модели на основе потенциальной теории без учета вихревой составляющей течения, 2) модели на основе полной системы уравнений динамики идеальной (либо вязкой) сжимаемой жидкости с учетом вихревой составляющей течения. Вязкие свойства газа для большинства задач аэродинамики не существенны, за исключением тонкого пограничного слоя обтекаемого тела. Потому в качестве базовой часто используют модель идеальной сжимаемой среды.

К первому классу можно отнести теорию Гутина [1] и её дальнейшее развитие, потенциальную теорию распространения малых возмущений от тонких тел, основанную на уравнении Кармана – Гудерлея. [2], его трехмерного нестационарного аналога [3]. Теория Гутина является первой и весьма приближённой попыткой описания звукового поля винта самолёта. Уравнение Кармана-Гудерлея стало основой успешного изучения шума ротора вертолёта. Но эти теории применимы для течений, где завихренность отсутствует или достаточно мала, чтобы ею можно было пренебречь. Такие течения реально существуют при обтекании тонких крыльев, лопастей хорошо обтекаемых винтов.

Ко второму классу можно отнести акустическую аналогию Лайтхилла [4] и её развитие рядом ученых [5] для различных течений. Теория Лайтхилла построена на основе модели вязкой сжимаемой среды. Тем не менее, в ней предполагается, что звук распространяется в некой идеальной неподвижной среде, а все остальные слагаемые, присутствующие в правой части неоднородного волнового уравнения, являются внешними источниками звука:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - c_0{}^2\nabla^2\rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (1)$$

Здесь

$T_{ij} = \rho v_i v_j + \delta_{ij}[(p - p_0) - c_o^2 \cdot (\rho - \rho_0)] - e_{ij}$ и $e_{ij} = \mu(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial y_k})$ - тензоры турбулентных и вязких напряжений соответственно.

Однако, поскольку среда в изначальной постановке вязкая, то необходимо на уровне модели учесть диссипацию звука внутренним трением, которое в свою очередь приводит к нагреванию. Это значит, что необходимо следить за изменением внутренней энергии системы.

Блохинцевым [6] впервые предложена система уравнений, описывающая генерацию звука в рамках идеальной сжимаемой среды, в которой наиболее адекватно и точно учтены все физические аспекты.

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial t} + [rot\bar{v}, \bar{\xi}] + [rot\bar{\xi}, \bar{v}] + \nabla(\bar{v}, \bar{\xi}) = -\frac{\nabla\pi}{\rho} + \frac{\nabla p \cdot \delta}{\rho^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla\delta) + (\bar{\xi}, \nabla\rho) + \rho div\bar{\xi} + \delta div\bar{v} = 0. \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla\sigma) + (\bar{\xi}, \nabla S) = 0. \qquad (4)$$

Здесь ξ, π, δ, σ - приращения $\bar{v}, p, \rho, S$ (вектора скорости, давления, плотности и энтропии) соответственно.

К уравнениям (2)-(4) добавим уравнения состояния, которые представим в переменных ρ, S:

$$h = (\frac{\partial p}{\partial S})_\rho, \ \pi = c^2\delta + h\sigma, \ c^2 = (\frac{\partial p}{\partial\rho})_S, \qquad (5)$$

где h - энтальпия течения.

Недостатком её является математическая незамкнутость: количество неизвестных превышает количество уравнений. Это значит, что корректно её решить нельзя без введения дополнительных ограничений. Упрощенным вариантом её можно считать уравнение Блохинцева (смотри в [6]), полученное при условии, что течение потенциально, баротропно и изоэнтропично.

Позже Хоу [5] было получено уравнение, учитывающее термодинамические законы. Хоу предложил ввести новую переменную $B = w + \frac{1}{2}v^2$ энтальпию торможения (где w, v - соответственно энтальпия и скорость течения) и получил уравнение:

$$\left\{\frac{D}{Dt}(\frac{1}{c^2}\frac{D}{Dt}) + \frac{1}{c^2}\frac{D\vec{v}}{Dt}\nabla - \nabla^2\right\}B = div\left\{[\vec{\Omega}\times\vec{v}] - T\nabla S\right\} - \frac{1}{c^2}\frac{D\vec{v}}{Dt}\left\{[\vec{\Omega}\times\vec{v}] - T\nabla S\right\} + \frac{1}{c_p}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{DS}{Dt} + \frac{1}{\gamma - 1}\cdot\frac{D^2S}{Dt^2}\right\}$$

(6)

В случае потенциального стационарного безвихревого течения уравнение Хоу совпадает с уравнением Блохинцева. При этом звук считается малым возмущением этого стационарного состояния [7]. И Лайтхилл, оставляя в левой части уравнения (1) волновой оператор для однородной невозмущенной среды, также на уровне модели привязан к этому устойчивому состоянию, не учитывает на самом деле неоднородные свойства поля течений. Не смотря на то, что в уравнении Хоу уже учтена неоднородность среды, оно также как и уравнение Лайтхилла, реально получено не для звука. Вывод обоих уравнений оставляет ряд вопросов, показывающих в каких пределах можно пользоваться акустической аналогией.

Однако, не смотря на то, что после работ Лайтхилла вышли ряд других работ (смотри перечень в [5],[8]), развивающие акустическую аналогию, эти работы не сняли с повестки дня *основной вопрос: можно ли создать более совершенную и в то же время простую модель генерации звука по возможности без всяких неоправданных допущений?*

Да можно. В данной работе предлагается следующий сквозной подход решения задачи. Сначала решается задача аэродинамики в рамках идеальной нестационарной сжимаемой среды. Затем, с учётом имеющихся данных, решается полученная в данной работе система уравнений, описывающая распространения звука в общем случае без принятия неоправданных предположений. Допущения, которые здесь всё же есть, являются общеизвестными и не противоречат физической сути рассматриваемой задачи.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАВИХРЕННОСТИ

Перед тем как представить новый подход следует заметить, что какова бы ни была природа звука аэроакустического происхождения (звук вращения, вихревой звук или шум пограничного слоя) в любом случае звук одним лишь течением непосредственно не генерируется, а является результатом взаимодействия потока с твердыми границами. Однако параметры течения, безусловно, оказывают влияние на характер возникновения распространения звука: при разных давлениях и скоростях в потоке (для одной и той же геометрии обтекаемого тела) естественно ожидать возникновение различных звуковых волн. Кроме того, при определенных условиях звуковые волны претерпевают изменение, проходя через неоднородные участки течения. В связи с этим возникает конкретная задача: получить систему уравнений аэроакустики для среды с существенной неоднородностью, масштабы которой были бы соизмеримы с длиной излучаемой звуковой волны. При больших скоростях течения (порядка $M \approx 1$) и наличии существенной завихренности такими неоднородностями, как правило, являются сильные ударные волны, которые возникают на довольно значительных участках лопастей. Известно, что указанные неоднородности, приводят к тому, что скорость распространения звука и другие параметры звуковой волны претерпевают изменения. Решению этих вопросов посвящён ниже следующий подход.

При выводе уравнения Лайтхилла (15) нигде речь ни шла о выделении звуковых пульсаций плотности $\rho^{'}$, а везде в уравнении присутствует ρ - обычная плотность среды. Представить $\rho = \rho_0 + \rho^{'}$, как это принято в классической акустике, где окружающая среда спокойна, а источник звука локализован, для неоднородной движущейся среды нельзя, поскольку масштабы неоднородности очень часто соизмеримы с длинами излучаемых волн. В общем случае вся среда вокруг излучающего тела находится в движении, скорость звука зависит от характеристик течения и переменна. Заметим, что ряд ученых (например, Юдин [9], Блохинцев [6]) полагают, что звук в течении потенциален. Действительно, всем известно, например, что завихренность течения, если она уже присутствует в потоке, не генерирует звук [6],[9]. Дополнительный источник звука появляется лишь в момент зарождения вихря, например, во время образования вихревой пелены. Циркуляция скорости в момент образования вихревой пелены определяется небольшим различием значения потенциала на нижней и верхней частях крыла, и определяется на основании теоремы Жуковского [10] . Но, как только она появилась, дальше уже вниз по потоку “не звучит”. Тем не менее, уже присутствующие звуковые волны взаимодействуют с вихрями: также как и средний поток, завихренность участвует в конвективном переносе звука.

Рассмотрим течение идеального сжимаемого газа уже завихренным потоком. Полагаем, что движение газа и распространение звука в нем адиабатично, поэтому возможные потери тепла в учет не принимаются. Следовательно, поскольку энтропия течения является тепловой функцией [11], считаем, что процесс изоэнтропичный, не смотря на то, что завихренность не нулевая. Это не противоречит общему нестационарному уравнению Крокко (для стационарного течения это не справедливо, но для него существует интеграл Бернулли [12]) . В качестве базовых уравнений возьмём уравнение движения Эйлера в форме Громекки-Лэмба:

$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\nabla\frac{v^2}{2}+rot\overline{v}\times\overline{v}=-\frac{1}{\rho}a^2\nabla\rho\,,\quad \text{или}\quad \rho\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\nabla\frac{v^2}{2}+rot\overline{v}\times\overline{v}\right)=-a^2\nabla\rho \tag{7}$$

где $\frac{1}{\rho}a^2\nabla\rho=\frac{1}{\rho}\nabla p$.

В уравнении (7) массовые силы отсутствуют. В большинстве задач аэроакустики массовые силы пренебрежимо малы по сравнению с остальными силами. К уравнению (7) добавим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\overline{v}=0 \tag{8}$$

Умножим (8) на $\overline{v}$ и сложим с (7), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{v}+\rho\left(\nabla\frac{v^2}{2}+rot\overline{v}\times\overline{v}\right)+\overline{v}div\rho\overline{v}=-a^2\nabla\rho \tag{9}$$

Продифференцируем (8) по времени t и возьмем оператор div от (9), получим:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+div\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{v})=0 \tag{10}$$

$$div\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{v}\right)+div\left(\rho\left(\nabla\frac{v^2}{2}+rot\overline{v}\times\overline{v}\right)\right)+div(\overline{v}div\rho\overline{v})=-div(a^2\nabla\rho) \tag{11}$$

Вычтем из уравнения (10) уравнение (11), в результате имеем:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-div\left(\rho\left(\nabla\frac{v^2}{2}+rot\overline{v}\times\overline{v}\right)\right)-div(\overline{v}div\rho\overline{v})=div(a^2\nabla\rho) \tag{12}$$

Применим известное соотношение из векторного анализа

$$div(\varphi\overline{a})=\varphi div\overline{a}+\overline{a}\cdot\nabla\varphi \tag{13}$$

к правой части (12). Учитывая $div\nabla\equiv\Delta$, получим:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - a^2\Delta\rho = div(\rho(\nabla\frac{v^2}{2} + rot\overline{v}\times\overline{v})) + div(\overline{v}div\rho\overline{v}) + \nabla a^2\cdot\nabla\rho \qquad (14)$$

Вот такое уравнение мог бы получить Лайтхилл (при отсутствии вязких слагаемых), если бы он не привязывался к однородному пространству. Однако уравнение (14) пока не описывает распространение звуковых волн, поскольку мы ещё не выделили малые возмущения.

Пусть переменные $\rho,\overline{v}$ получили малые приращения: $\rho+\rho',\overline{v}+\nabla\varphi$. Поскольку завихренность уже существовала до момента генерации звука, то на основании выше сказанного, звуковое поле можно считать малой потенциальной добавкой $\nabla\varphi$. Для скорости звука приращение не задаём, поскольку она в каждый момент разная и это изменение учтено в соотношении $dp = a^2 d\rho$. Её фактическое значение вычисляется в каждый фиксированный момент времени и положении в течении при решении задачи гидродинамики, а не акустики. На основании сказанного получим:

$$\frac{\partial^2(\rho+\rho')}{\partial t^2} - a^2\Delta(\rho+\rho') = div((\rho+\rho')(\nabla\frac{(v+\nabla\varphi)^2}{2} + rot(\overline{v}+\nabla\varphi)\times(\overline{v}+\nabla\varphi)) +$$
$$+ div[(\overline{v}+\nabla\varphi)div((\rho+\rho')(\overline{v}+\nabla\varphi))] + \nabla a^2\cdot\nabla(\rho+\rho') \qquad (15)$$

Вычтем из уравнения (15) уравнение (14) и опустим слагаемые второго порядка малости, имеющие сомножителями $\rho'\nabla\varphi,(\nabla\varphi)^2$:

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} - a^2\Delta\rho' = div[(\rho(\nabla(\overline{v}\cdot\nabla\varphi) + rot\overline{v}\times\nabla\varphi) + div[\rho'(\nabla\frac{v^2}{2} + rot\overline{v}\times\overline{v})] +$$
$$+ div[\overline{v}\cdot div(\rho\nabla\varphi + \rho'\overline{v})] + div(\nabla\varphi\cdot div\rho\overline{v}) + \nabla a^2\cdot\nabla\rho' \qquad (16)$$

Аналогичную процедуру проделаем с уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial(\rho+\rho')}{\partial t} + div(\rho+\rho')(\overline{v}+\nabla\varphi) = 0 \qquad (17)$$

Вычтем из (17) уравнение (8), опустим величины второго порядка малости, получим:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho\Delta\varphi + \nabla\varphi\cdot\nabla\rho + \rho' div\overline{v} + \overline{v}\cdot\nabla\rho' = 0 \qquad (18)$$

Система уравнений (16),(18) представляет собой замкнутую систему акустики неоднородной движущейся среды для двух переменных ρ',φ. Таким образом, для того чтобы решить задачу акустики для неоднородной движущейся среды с завихренностью необходимо:

1) решить задачу гидродинамики, определив все гидродинамические переменные $\rho,\overline{v},a^2$;

2) затем подставить их в (16) и (18); результирующее приближение получится с точностью до величин второго порядка малости, т.е. с той точностью, с которой решается задача.

Полученная система уравнений (16),(18) не имеет аналитического решения. Однако, добавив начальные и граничные условия в каждом конкретном случае, её можно решить численно с помощью конечно-разностного метода. Но перед решением любой задачи всегда необходимо обезразмерить уравнения. В ряде случаев уравнения упрощаются, что облегчает численный расчет. Численная процедура пространственной трёхмерной задачи, тем не менее, и сегодня занимает много машинных ресурсов. Поэтому желательно получить представление дальнего поля, чтобы по возможности сократить время расчёта общей задачи – ближнего и дальнего звукового поля.

Для оценки поведения отдельных слагаемых неоднородного волнового уравнения относительно переменной ρ' (16) в дальнем поле необходимо расписать правую часть этого уравнения. Однако, проводить оценку слагаемых в выражении для дальнего поля нужно при решении конкретно рассматриваемой задачи с уже введенными характерными масштабами течения: скоростями, завихренностью, частотой внешней силы и волновыми размерами источника звука.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получена система из двух уравнений акустики неоднородной движущейся среды с завихренностью. Не смотря на то, что уравнение (16) является дифференциальным уравнением третьего порядка относительно звукового потенциала φ, относительно колебательной скорости ($\overline{v}' = \nabla\varphi$) оно является уравнением второго порядка, как и уравнение Лайтхилла.

Автор выражает благодарность академику В.Т. Гринченко за научные дискуссии, семинары, на которых поднимаются принципиально важные вопросы современной аэроакустики, что в результате стимулировало глубокий анализ существующих теорий и написание данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л.Я.Гутин*. О звуковом поле вращающегося винта. // ЖТФ. Том VI,вып.5,стр.899-909,1936г.
2. *Коул Дж., Кук Л.* Трансзвуковая аэродинамика. – М: Мир,1989.-360с.
3. *P.V. Lukianov*. Three dimensional non-stationary small disturbances spreading off thin wing. // Proceedings of VII International scientific conference “AVIA-2006”,Kiev, September 25-27,2006,p.14.37-14.40.
4. *Lighthill M.J.* On Sound Generated Aerodynamicly,I: General Theory.// Proceedings of the Royal Society.London.1952.211A, №1107.pp.564-587.
5. *Howe M.S.* Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute.// J.Fliud Mech.v.71.p.4,p625-673.
6. *Блохинцев Д.И.*Акустика неоднородной движущейся среды. М.Наука.1981.206с.
7. Авиационная акустика .// *под ред. А.Г. Мунина* ,М. Машиностроение.1986.т.1.244с.
8. *Голдстейн М.Е.* Аэроакустика.М.Машиностроение,1981.296с.
9. *Е.Я.Юдин*. О вихревом звуке вращающихся стержней.// ЖТФ.т.XIV.№9.с.561-567.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика.М.Наука.,1986,736с.
11. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1 – М.Наука, 1983. 560с.
12. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа.-М.Наука.,1987,840с.