ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА ТОНКИМ ТРЕХМЕРНЫМ КРЫЛОМ: ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ

ПЕТР В. ЛУКЬЯНОВ,
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев,тел.:453-26-60

Using the generalized Green's formula and Kirchoff's approach for the 3-dimensional non- steady flow equation [12] an integral formula for far field has been obtained. A comparative analysis of through solution of the problem with Lyrintzis's [7] and Morino's [10] approach is given.

ВВЕДЕНИЕ

Современные подходы исследований дальнего поля движущегося крыла следующие. Начиная с работы Моргана [1] излучение звука от движущихся поверхностей описывают различными способами [2-5]. Цель большинства из перечисленных подходов состоит в получении аналога формулы Кирхгофа для нестационарной поверхности. При этом внимание акцентируется на описании дальнего поля от движущегося источника (поверхности) при условии, что давление (т.е. потенциал) и компоненты скорости (производные потенциала) известны. Однако откуда взять эти величины? Как указано в [6] это есть основное препятствие на пути непосредственного использования как акустической аналогии Лайтхилла [2], так и уравнения Фоукс Уильямса-Хоукингса [3].

Найти решение этого вопроса пытались по-разному. Так в работе [5] использована теория обобщенных функций с целью представления потенциала течения в виде обобщенной финитной функции. Такой подход, однако, не физичен, поскольку потенциал доопределяют в область, где он попросту существовать не может.

Другим естественным подходом стало использование в качестве расчетной модели для вычисления потенциала и его производных в ближнем поле теории распространения малых возмущений от тонкого крыла (в плоской нестационарной постановке) [7,8]. Для дальнего поля используется интегральное представление [9] Морино, в котором в качестве значений на границе области выбираются расчетные данные, полученные на основании теории малых возмущений для ближнего поля. Однако, Морино не конкретизирует нелинейного слагаемого, не придавая ему большого значения. Уже гораздо в более поздних работах [10,11], носящих систематизирующий характер, Морино вернулся к идее трактовки течения, подобной акустической аналогии Лайтхилла.
Но в имеющемся представлении дальнего поля учтены не все нестационарные слагаемые, которые имеют большое значение.

Ниже приводится вывод интегрального соотношения для дальнего поля на основе полного трехмерного нестационарного уравнения распространения малых возмущений [12].

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ

Для получения интегрального соотношения для дальнего поля используем подход, приведенный в [6]. Для удобства дальнейшего изложения вернемся к размерным координатам x, y, z и потенциалу $\phi' = \varepsilon f$. Это позволит нам прямо воспользоваться имеющимися общими выражениями.

Пусть есть неоднородное волновое уравнение для равномерно движущейся среды, описывающее распространение звука в точке $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ в момент времени t_1 от источника расположенного в точке $y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$ (рис.1):

$$\nabla^2\phi' - \frac{1}{a_\infty{}^2}\frac{D_o{}^2}{Dt^2}\phi' = \gamma(y,t), \tag{1}$$

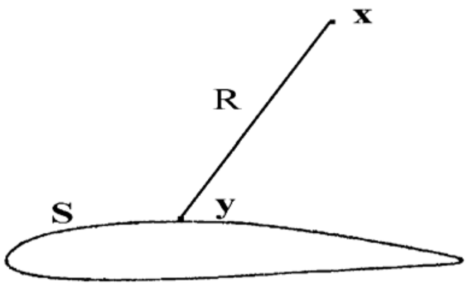

Рис.1

с распределениями источника γ и значениями ϕ' на границе, где

$$\frac{D_o^2}{Dt^2} = (\frac{\partial}{\partial t} + U\cdot\frac{\partial}{\partial x})^2.$$

Функция Грина $G(y,t|x,t_1)$ - решение неоднородного волнового уравнения для движущейся среды

$$\nabla^2 G - \frac{1}{a_\infty{}^2}\frac{D_o{}^2}{Dt^2}G = -\delta(t_1-t)\delta(x-y), \tag{2}$$

в некоторой пространственной области $V(t)$, которая ограничена (изнутри или снаружи) поверхностью $S(t)$. Поверхность $S(t)$ в общем случае считается подвижной. Тогда акустическое давление в произвольной точке x и момент времени t_1 связано с распределением γ источников в области V обобщенной формулой Грина

$$\int_{-T}^{T} dt \int_{V(t)} \gamma(y,t)G(y,t|x,t_1)dy + \int_{-T}^{T} dt \int_{S(t)} \left[G(y,t\left| x,t_1)(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{v'_n}{a_\infty^2}\frac{D_o}{Dt}) \right. \phi'(y,t) - \right.$$

$$- \phi'(y,t)(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{v'_n}{a_\infty^2}\frac{D_o}{Dt})G(y,t|x,t_1) \ \Big] dS(y) = \begin{cases} \phi'(x,t_1), x\in V(t), \\ 0, x\notin V(t) \end{cases} \tag{3}$$

В выражении (3) $v_n = (v_s - \bar{i}U)\cdot\bar{n}$ – результирующая скорость поверхности по нормали в исходной системе координат, движущейся со скоростью $\bar{i}U$, v_s - скорость поверхности.

Область $V(t)$ в этом соотношении может находиться либо внутри, либо снаружи замкнутой поверхности (или поверхностей) $S(t)$. Однако в последнем случае следует потребовать, чтобы интеграл по этой поверхности был равен нулю, если интегрирование выполняется по большой сфере, граница которой расширяется до бесконечности.

В случае рассмотренной в [12] постановке задачи поверхность крыла считается неподвижной, а на нее набегает поток со скоростью $\bar{i}U$. Поэтому, исходя из данной ситуации, формулу (3) можно использовать так, как если бы поверхность двигалась со скоростью, равной скорости набегающего потока, а среда покоилась. В этом случае $v_n^{'} = U\overline{in}$ - результирующая скорость поверхности крыла.

Для того чтобы можно было непосредственно воспользоваться формулой (6) приведем трехмерное нестационарное уравнение распространения малых возмущений [12] в размерных координатах в соответствие виду (1):

$$\nabla^2\phi^{'} - \frac{1}{a_\infty{}^2}\frac{D_o{}^2}{Dt^2}\phi^{'} = M_1^2(1+\gamma)\phi^{'}_\xi\phi^{'}_{\xi\xi}. \qquad (4)$$

Тогда, на основании выражения правой части (4), равенство (3) перепишется в следующем виде:

$$\int_{-T}^{T} dt \int_{V(t)} M_1^2(1+\gamma)\phi^{'}_\xi\phi^{'}_{\xi\xi}G(y,t\,|\,x,t_1)dy + \int_{-T}^{T} dt \int_{S(t)} \Big[G(y,t\,\Big|\,x,t_1)(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{v_n^{'}}{a_\infty^2}\frac{D_o}{Dt})\,\phi^{'}(y,t) -$$

$$-\phi^{'}(y,t)(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{v_n^{'}}{a_\infty^2}\frac{D_o}{Dt})G(y,t\,|\,x,t_1)\ \Big]dS(y) = \begin{cases} \phi^{'}(x,t_1), x \in V(t), \\ 0, x \notin V(t) \end{cases} \qquad (5)$$

Однако использование формулы (5) затруднено, выполнить перестановку порядка интегрирования по времени и пространственным координатам не представляется возможным, так как объем $V(t)$ и поверхность $S(t)$ зависят от времени. Этим по-видимому и объясняется тот факт, что данная формула в ее общем виде не получила дальнейшего применения.

Вернемся к изначальной постановке задачи, то есть, считаем, что поток набегает на неподвижное крыло. Если в левой части уравнения (4) вместо производной D_o^2/Dt^2 оставить лишь $\partial^2/\partial t^2$ как в обычном волновом уравнении, то справа окажется три слагаемых. И тогда возможно использование идеи акустической аналогии Лайтхилла. В ней предполагается, что среда стационарна $U=0$, а на её поверхности действуют силовые нагрузки, которые выражаются в виде правой части неоднородного волнового уравнения для стационарной среды. Учитывая сказанное, получим

$$\nabla^2\phi^{'} - \frac{1}{a_\infty{}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^{'} = M_1^2\left\{(1+(1+\gamma)\phi^{'}_x)\phi^{'}_{xx} + \frac{2}{U}\phi^{'}_{xt}\ \right\}. \qquad (6)$$

Функция G удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 G - \frac{1}{a_\infty{}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G = -\delta(t_1 - t)\delta(x-y). \qquad (7)$$

В силу того, что крыло тонкое, то скорость набегающего потока практически перпендикулярна нормали к крылу, т.е. можно приближенно считать $U\overline{in}$=0. В таком случае с учетом (5) и (6) выражение (3) примет вид

$$\int_{-T}^{T} dt \int_V M_1^2\{(1+(1+\gamma)\phi^{'}_\xi)\phi^{'}_{xx} + \frac{2}{U}\phi^{'}_{xt}\}Gdy + \int_{-T}^{T} dt \int_s (G\frac{\partial\phi^{'}}{\partial n} - \phi^{'}\frac{\partial G}{\partial n})dS = \begin{cases} \phi^{'}(x,t_1), x \in V(t), \\ 0, x \notin V(t) \end{cases} \qquad (8)$$

Считаем, что объем $V(t)$ - область, ограниченная крылом изнутри и сферой большого радиуса снаружи. Функция Грина для волнового оператора имеет вид

$$G = \frac{\delta(t - t_1 + \dfrac{R}{a_\infty})}{4\pi R} \qquad (9)$$

где R - расстояние между точками x и y. Для бесконечной области функция Грина определена единственным образом. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial n}(\delta(t-t_1+\frac{R}{a_\infty}))=\frac{1}{a_\infty}\frac{\partial\delta}{\partial t}\frac{\partial R}{\partial n} \tag{10}$$

а также свойства производных δ - функции [13], окончательно после интегрирования по времени получим

$$-\int_V [M_1^2\{(1+(1+\gamma)\phi_x^{'})\phi_{xx}^{'}+\frac{2}{U}\phi_{xt}^{'}\}\frac{1}{R}]_{t^*}dy+\int_s [\frac{1}{R}\frac{\partial\phi^{'}}{\partial n}+\frac{1}{Ra_\infty}\frac{\partial R}{\partial n}\frac{\partial\phi^{'}}{\partial\tau}-\phi^{'}\frac{\partial(1/R)}{\partial n}]_{t^*}dS=4\pi\phi^{'}(x,t_1) \tag{11}$$

Здесь t^* - время запаздывания. Подынтегральное выражение первого слагаемого левой части равенства (11) можно переписать в следующем виде

$$\{(1+(1+\gamma)\phi_x^{'})\phi_{xx}^{'}+\frac{2}{U}\phi_{xt}^{'}\}\frac{1}{R}=\frac{\partial(F/R)}{\partial x}+\frac{F}{R^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}, \tag{12}$$

где

$$F=\phi_x^{'}+\frac{1}{2}(1+\gamma)(\phi_x^{'})^2+\frac{2}{U}\phi_t^{'} \tag{13}$$

Поскольку

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y_1}=-\frac{x_1-y_1}{R} \tag{14}$$

то весь объемный интеграл I на основании теоремы о дивергенции запишется

$$I=-M_1^2(\int_{S+S\infty}[\ \frac{F}{R}\ ]_{t^*}dS_x+\int_V\left[F\cdot\frac{x_1-y_1}{R^3}\right]_{t^*}dy), \tag{15}$$

где $dS_x=(\overline{nS})_x$.

Первое слагаемое в правой части (15) состоит из двух поверхностных интегралов по поверхности крыла S и по бесконечно расширяющейся сфере S_∞. Как указывалось выше, на основании условия излучения интеграл по сфере большого радиуса $R\to\infty$ равен нулю. Оставшийся объемный интеграл имеет вполне определенное числовое значение, поскольку

$$\int_V\left[F\cdot\frac{x_1-y_1}{R^3}\right]_{t^*}dy=\int_{V/V_\varepsilon}\left[F\cdot\frac{x_1-y_1}{R^3}\right]_{t^*}dy+\int_{V_\varepsilon}\left[F\cdot\frac{x_1-y_1}{R^3}\right]_{t^*}dy \tag{16}$$

где V_ε – шар радиуса ε. Второй интеграл при $\varepsilon\to 0$ равен нулю. Покажем, что первый интеграл в правой части (16) - величина ограниченная. В общем нестационарном случае эту оценку выполнить не просто, о чем свидетельствует имеющееся в [14] выражение для дальнего поля, полученное для осесимметричного стационарного течения:

$$\Phi\sim\frac{Dx}{R^3},\text{где } D=-\pi\{\int_0^1 F^2(\xi)d\xi+\frac{\gamma+1}{K}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\Phi_\xi^2\rho d\rho d\xi\},\text{ а } K=(1-M_\infty^2)/\delta^{2/3} \tag{17}$$

В выражении D присутствует интеграл по бесконечным интервалам, оценка которого не дана. Однако, на больших расстояниях от излучаемого тела (дальнее поле) форма излучаемой поверхности не влияет на качественную картину излучения. В виду того, что удлинение крыла будет мало по сравнению с расстоянием до исследуемой точки наблюдения в дальнем поле, можно сделать приближенную оценку оставшегося объемного интеграла. При этом воспользуемся оценкой дальнего поля для плоского нестационарного течения [14]:

$$\Phi_\infty \approx \frac{1}{r} \tag{18}$$

где r - большой радиус, соответствующий дальнему полю. Не трудно видеть, что на основании данной оценки выражение $F \approx \frac{1}{r}$. Поэтому

$$\int\limits_{V/V_\varepsilon} \left[F \cdot \frac{x_1 - y_1}{R^3} \right]_{t^*} dy \approx \frac{1}{r} \int\limits_{V/V_\varepsilon} \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) \right]_{t^*} dy = -\frac{1}{r} \int\limits_{S_\infty + s_\varepsilon + S} \left[\frac{1}{R} \right]_{t^*} dS_x \tag{19}$$

Интеграл по поверхности S_ε есть величина порядка ε. Интеграл по поверхности S_∞ в силу условия излучения равен нулю. Интеграл по поверхности крыла S величина конечная. Поэтому с учетом множителя $1/r$ стремится к нулю при больших значениях r. Следовательно, весь объемный интеграл в (15) есть малая величина, которой можно пренебречь. В результате (11) окончательно примет вид

$$-M_1^2 \int\limits_S \left[\frac{F}{R} \right]_{t^*} dS_x + \int\limits_s \left[\frac{1}{R}\frac{\partial \phi'}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty}\frac{\partial R}{\partial n}\frac{\partial \phi'}{\partial \tau} - \phi' \frac{\partial (1/R)}{\partial n} \right]_{t^*} dS = 4\pi\phi'(x, t_1) \tag{20}$$

Выражение (20) перепишем несколько в иной форме, выделив одно слагаемое из первого интеграла:

$$-M_1^2 \int\limits_S \left[\frac{\phi'_x + \frac{1}{2}(1+\gamma)(\phi'_x)^2}{R} \right]_{t^*} dS_x - \frac{2M_1^2}{U} \int\limits_S \left[\frac{\phi'_t}{R} \right]_{t^*} dS_x +$$

$$+ \int\limits_s \left[\frac{1}{R}\frac{\partial \phi'}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty}\frac{\partial R}{\partial n}\frac{\partial \phi'}{\partial \tau} - \phi' \frac{\partial (1/R)}{\partial n} \right]_{t^*} dS = 4\pi\phi'(x, t_1) \tag{21}$$

Полученное представление звукового потенциала в дальнем поле (21) практически совпадает с представлением (1.106) [15], если не учитывать нелинейный член в первом интеграле левой части (21). Отличие состоит лишь в множителе $(1-\beta^2)^{1/2}$, поскольку здесь не использовалось растяжение координат. Следовательно, появляется дополнительное слагаемое в первом интеграле (21), поскольку уравнение в сжатой системе координат в явном виде его не содержит, а здесь оно присутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morgans W.R.* The Kirchhoff Formula extended to a Moving Surfaces.// Philosophical Magazine.1930.V9,s.7,N55.p141-161.
2. *Lighthill M.J.* On Sound Generated Aerodynamicly,I: General Theory.// Proceedings of the Royal Society (London).1952.211A, N 1107.p564-587.
3. *Хромов В.А.* К обобщению теоремы Кирхгофа для случая поверхности, движущейся произвольным образом. // Акустический журнал.IX,вып.1.1963.с.88-93
4. *Ffowcs Willams J.E. and Hawkings*. Sound Generated by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion.// Philosophical Transactions of the Royal Socicety.1969.A264,N 1151. p321-342.

5. *Farassat F.* and Myers M.K.Extension of Kirchhoff's Formula to Radiation from Moving Surfases. // Journal of Sound and Vibration.1988.V.123,N.3.p451-461.
6. *Голдштейн М.Е.* Аэроакустика.М:Машиностроение.1981.296с.
7. *Lyrintzis A.S. and George A.R.* Far Field Noise of Transonic Blade-Vortex Interactions. // American Helicopter Society Journal.1989.V.27, N 7.p30-39
8. *Lyrintzis A.S. and Xue Y.* Study of the Noise Mechanisms of Transonic Blade-Vortex Interactions.//AIAA Journal.1991.V.29, N 10 {1562-1572}.
9. *Morino L.A.* General Theory of Unsteady Compressible Potential Aerodynamics. // NASA.1974.CR-2464
10. *Morino L.* Boundary Integral Equations in Aerodynamics. //Applied Mechanics Review.1993.46, N8.445-466.
11. *Morino L.* and Bernardini G.On the Sound Generated by Moving Surfaces - the Effects of Vorticity.// Seventh International Congress on Sound and Virations. Garmisch Partenkirchen.Germany.4-7 July 2000.1339-1346.
12. *Lukianov PetroV*. Three dimensional non-stationary small disturbances spreading off thin wing. // Proceedings of VII International Conference “AVIA-2006”.Kyiv.September 25-27,2006. p14.37-14.40.
13. *Владмиров В.С.* Уравнения математической физики. М:Наука.1981.512с.
14. *Коул Дж.,Кук Л.* Трансзвуковая аэродинамика.М:Мир.1989.360с.
15. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды.М:Наука.1981.206с.