ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ, ДИФРАГОВАНИХ ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ, ПРИ ПЛОСКІЙ ДЕФОРМАЦІЇ

О.В. ЛИТВИН, ас., В.Г. ПОПОВ, д.ф.-м.н., проф..
Одеська національна морська академія

ВСТУП

Вдосконалення засобів неруйнівного контролю та дефектоскопії вимагає вивчення контактної взаємодії тонких пружних тіл з оточуючим середовищем. Актуальною, з точки зору багатьох застосувань, є проблема дистанційного визначення геометричних та механічних параметрів тонкостінних неоднорідностей, зокрема включень, в ізотропному пружному середовищі за допомогою розсіяних хвильових полів. Оскільки інформація про властивості включення міститься в характеристиках розсіяних полів, то важливе значення мають алгоритми розв’язання задач з їх дослідження. В роботі досліджуються поля переміщень та напружень за допомогою так званих повних поперечних перерізів розсіювання (ПППР).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай необмежене пружне середовище (матриця), що знаходиться в умовах плоскої деформації, містить пружне включення у вигляді пластини товщини h. У площині xOy включення займає область $|x| \le a, -h/2 \le y \le h/2$. На нього падають плоскі гармонічні поздовжні хвилі або хвилі поперечного зсуву, задані своїми потенціалами $[1]$

$$\phi_0(x;\, y) = Ae_1(x;\, y)\kappa_1^{-1},\ \psi_0(x;\, y) = Ae_2(x;\, y)\kappa_2^{-1}, \tag{1}$$

де $\kappa_j^2 = \dfrac{\omega^2}{c_j^2}$, $e_j(x;\, y) = \exp \kappa_j i(x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0)$ $(j = 1, 2)$, $c_1^2 = \dfrac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}$, $c_2^2 = \dfrac{\mu_1}{\rho_1}$, λ_1, μ_1, ρ_1 – сталі Ламе та густина середовища, ω – частота коливань, θ_0 – кут між додатним напрямком вісі Ox та напрямком розповсюдження хвиль. Всі співвідношення, як і наступні, записані для амплітудних значень. Залежність від часу визначається множником $e^{-i\omega t}$, який тут і далі опускається.

При формулюванні умов взаємодії включення з матрицею будемо вважати включення настільки тонким, що граничні умови на його сторонах можна сформулювати відносно його серединної площини. Нехай обидві сторони включення повністю зчеплені з матрицею. Тоді на його серединній площині терплять розрив напруження, стрибки яких позначені:

$$\sigma_y^1(x, +0) - \sigma_y^1(x, -0) = \chi_1(x),\ \tau_{xy}^1(x;+0) - \tau_{xy}^1(x;-0) = \chi_2(x),\ -a \le x \le a. \tag{2}$$

Крім того, з умов повного зчеплення випливають рівності:

$$v^1(x, \pm 0) = v_0(x) - v^0(x,0),\ u^1(x;\pm 0) = u_0(x) - u^0(x,0) - \frac{h}{2}\frac{dv_0}{dx},\ -a \le x \le a, \tag{3}$$

де τ_{xy}^1, σ_y^1 –дотичні та нормальні напруження відбитих хвиль, $u_0(x), v_0(x)$ –амплітуди відповідно зсувних вздовж вісі Ox та згинальних коливань серединної площини включення.

Якщо на обох сторонах включення виконуються умови гладкого контакту з матрицею, тоді на включенні терплять розрив напруження σ_y та переміщення u, стрибки яких позначені

$$\sigma_y^1(x;+0)-\sigma_y^1(x;-0)=\chi_1(x),$$

$$u^1(x;+0)-u^1(x;-0)=\chi_4(x),\ -a\le x\le a,\ \chi_4(\pm a)=0. \tag{4}$$

Також з умови гладкого контакту випливає:

$$v^1(x,\pm 0)=v_0(x)-v^0(x,0),\ -a\le x\le a,\ \tau_{xy}^1(x;\pm 0)=-\tau_{xy}^0(x,0). \tag{5}$$

При формулюванні граничних умов (2) – (5) було виконано подання переміщень та напружень в матриці у вигляді

$$v=v^1+v^0,\ u=u^1+u^0,\ \sigma_x=\sigma_x^1+\sigma_x^0,\ \tau_{xy}=\tau_{xy}^1+\tau_{xy}^0,\ \sigma_y=\sigma_y^1+\sigma_y^0. \tag{6}$$

Перші доданки в (6) пов'язанні з розсіяними від включення хвилями, другі – з хвилями, що падають на включення.

Переміщення серединної площини включення визначаються з відповідних рівнянь теорії пружних пластин $[2]$, які за плоскої деформації мають вигляд:

$$u_0''(x)+k_{02}^2u_0(x)=-\chi_2(x)/D_{02}h,\ k_{02}^2=\omega^2\rho_0/D_{02},\ D_{02}=E_0/(1-\nu_0^2),\ -a<x<a, \tag{7}$$

$$v_0^{IV}(x)-k_{01}^2v_0(x)=-\chi_1(x)/D_{01},\ k_{01}^2=\rho_0\omega^2h/D_{01},\ D_{01}=E_0h^3/12(1-\nu_0^2),\ -a<x<a, \tag{8}$$

де ρ_0, E_0, ν_0 – відповідно густина, модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона включення.

Вважатимемо вплив середовища на бічні кромки включення $x=\pm a$ нехтувало малим, внаслідок чого на них виконані умови вільного краю:

$$N(\pm a)=-D_{02}\frac{\partial u_0}{\partial x}(\pm a)=0,\ M^{\pm}(\pm a)=-D_{01}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}(\pm a)=0,\ Q^{\pm}(\pm a)=-D_{01}\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}(\pm a)=0. \tag{9}$$

В останніх рівностях N, Q – нормальні і поперечні сили, M – згинальний момент на кромках включення.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Оскільки переміщення, викликані хвилею, відбитою від включення, мають розриви на серединній площині включення, то їх доцільно подати у вигляді розривного розв'язку рівнянь Ламе $[3]$:

$$u^1(x;y)=\int_{-a}^{a}\chi_1(\eta)G_{41}(\eta-x,y)d\eta+\int_{-a}^{a}\chi_2(\eta)G_{42}(\eta-x;y)d\eta-\int_{-a}^{a}\chi_4'(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}G_{44}^*(\eta-x;y)d\eta,$$

$$v^1(x;y)=\int_{-a}^{a}\chi_1(\eta)G_{31}(\eta-x;y)d\eta+\int_{-a}^{a}\chi_2(\eta)G_{32}(\eta-x,y)d\eta-\int_{-a}^{a}\chi_4'(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}G_{34}^*(\eta-x;y)d\eta,$$

$$\sigma_y^1(x,y)=\int_{-a}^{a}\chi_1(\eta)G_{11}(\eta-x;y)d\eta+\int_{-a}^{a}\chi_2(\eta)G_{12}(\eta-x,y)d\eta-\int_{-a}^{a}\chi_4'(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}G_{14}^*(\eta-x;y)d\eta,$$

$$\tau_{xy}^1(x,y)=\int_{-a}^{a}\chi_1(\eta)G_{21}(\eta-x;y)d\eta+\int_{-a}^{a}\chi_2(\eta)G_{22}(\eta-x,y)d\eta-\int_{-a}^{a}\chi_4'(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}G_{24}^*(\eta-x;y)d\eta,$$

$$\sigma_x^1(x,y)=\int_{-a}^{a}\chi_1(\eta)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\kappa_1^2}{\xi^2}r_1+2\frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2}\right]d\eta+\int_{-a}^{a}\chi_2(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\kappa_1^2}{\xi^2}r_1+2\frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2}\right]d\eta+$$

$$+2\mu\int_{-a}^{a}\frac{\chi_4'(\eta)}{\kappa_2^2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\kappa_1^2}{\xi^2}r_1+2\frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2}+\left(\kappa_2^2+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)r_2\right]d\eta,\ \frac{\partial G_{i4}^*(\eta-x,y)}{\partial\eta}=G_{i4}(\eta-x,y),i=1;4 \tag{10}$$

У випадку відшарованого включення в поданнях для переміщень та напружень слід покласти $\chi_2(x) \equiv 0$, для повністю зчепленого включення – $\chi_4(x) \equiv 0$. Ядра інтегральних операторів визначені у $[3]$.

Розв’язки одновимірних крайових задач (7), (8), (9) задаються формулами:

$$u(\zeta) = -\frac{m_0}{2\varepsilon}\int_{-1}^{1}\phi_2(\tau)G_2(\tau,\zeta)d\tau\,,\ v(\zeta) = -\gamma_0\int_{-1}^{1}\phi_1(\tau)G(\tau,\zeta)d\tau\,, \tag{11}$$

$$\phi_1(\zeta) = \chi_1(a\zeta)/\mu_1\,,\ \phi_2(\zeta) = \chi_2(a\zeta)/a\,,\ \phi_4'(\zeta) = \chi_4'(a\zeta)\ \zeta = a^{-1}x\,,$$

$$m_0 = \varepsilon_0\mu_0\,,\ \gamma_0 = 3m_0/2\varepsilon^3\,,\ \varepsilon = h/2a\,,\ \kappa_0 = a\kappa_2\,,\ \mu_0 = \left(1-\nu_0^2\right)/2\left(1+\nu_1\right);\ \varepsilon_0 = E_1/E_0\,,$$

$$\rho = \rho_1/\rho_0\,.$$

Тут $G_1(\tau,\zeta)$, $G_2(\tau,\zeta)$ – функції Гріна відповідних крайових задач $[4]$, $[5]$.

Для визначення стрибків, що входять в (10), (11) з граничних умов отримана система інтегральних рівнянь. Отримання цієї системи докладно виведено у $[4]$, $[5]$. Означена система інтегральних рівнянь для повністю зчепленого включення має вигляд:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\phi_1(\tau)\left\{\frac{1+\xi^2}{2}\ln|\tau-\zeta| + F_1(\tau-\zeta) + 2\pi\gamma_0 G_1(\tau,\zeta)\right\}d\tau = f_1(\zeta)\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\phi_1(\tau)\left\{-2\pi\gamma_0\frac{\partial}{\partial\zeta}G_1(\tau,\zeta\xi)\right\}d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\phi_2(\tau)\left\{\frac{1+\xi^2}{2}\ln|\tau-\zeta| + F_2(\tau-\zeta) + \frac{\pi m_0}{\varepsilon}G_2(\tau,\zeta)\right\}d\tau = f_2(\zeta)\,, \tag{12}$$

$$f_1(\zeta) = -i\left[\alpha\sin\theta_0\exp(i\kappa_0\xi\zeta\cos\theta_0) - \beta\cos\theta_0\exp(i\kappa_0\zeta\cos\theta_0)\right],$$

$$f_2(\zeta) = -i\left[\alpha\cos\theta_0\exp(i\kappa_0\xi\zeta\cos\theta_0) + \beta\sin\theta_0\exp(i\kappa_0\zeta\cos\theta_0)\right].$$

Функції $F_1(\tau-\zeta)$, $F_2(\tau-\zeta)$ неперервні при $-1 \le \tau,\zeta \le 1$. Формули для них не наводяться з огляду на їх надзвичайно великий об’єм.

Якщо включення відшароване з обох сторін, тоді система рівнянь має вигляд:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\phi_1(\tau)\left\{\frac{1+\xi^2}{2}\ln|\tau-\zeta| + \Gamma_{21}(\tau-\zeta) + \gamma_0 G_1(\tau,\zeta)\right\}d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\phi_4'(\tau)\left\{\xi^2\ln|\tau-\zeta| + \Gamma_{22}(\tau-\zeta)\right\}d\tau = f_1(\zeta)\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\phi_1(\tau)\left\{-\frac{\xi^2}{\tau-\zeta} + \Gamma_{11}(\tau-\zeta)\right\}d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\phi_4'(\tau)\left\{\frac{2\left(1-\xi^2\right)}{\tau-\zeta} + \Gamma_{12}(\tau-\zeta)\right\}d\tau = f_2(\zeta)\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\phi_4'(\tau)d\tau = 0\,. \tag{13}$$

Для побудови наближеного розв’язку системи інтегральних рівнянь (12) та (13) невідомі функції представлені у вигляді $[6]$:

$$\phi_1(\tau) = \frac{\psi_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,,\ \phi_2(\tau) = \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,,\ \phi_4'(\tau) = \frac{\psi_4(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,,$$

$$\psi_j(\tau)=\sum_{m=1}^{n}\psi_{mj}\frac{T_n(\tau)}{T_n'(\tau_m)(\tau-\tau_m)}\,,\ j=1;2;4\ \ j=1;2;4\,, \tag{14}$$

де $T_n(\tau)$ - многочлен Чебишева 2-го роду, $\psi_{mj}=\psi_j(\tau_m)$, $\tau_m=\cos\frac{\pi(2m-1)}{2n}$, $m=\overline{1,n}$ – корені цього поліному.

Для отримання наближеного розв'язку інтегральні рівняння заміняться системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень функцій у вузлах інтерполяції $[4]$, $[5]$.

Повний поперечний переріз розсіювання $Q_k(\omega)$ за означенням $[7]$, $[8]$ є відношенням усередненої швидкості поширення енергії розсіяної хвилі $\left\langle Q_k^1\right\rangle_t$ через циліндричну поверхню одиничної висоти, що містить включення, до середньої за періодом кількості енергії падаючої хвилі $\left\langle I^0\right\rangle_t$, що проходе через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку розповсюдження падаючої хвилі, тобто

$$Q_k(\omega)=\left\langle Q_k^1\right\rangle_t\Big/\left\langle I^0\right\rangle_t\,,\ k=1;2\,. \tag{15}$$

Тут $k=1$ відповідає випадку розсіювання від включення поздовжньої хвилі, а $k=2$ – поперечної хвилі.

Оскільки розсіяне хвильове поле визначається суперпозицією поздовжніх і поперечних хвиль, то переміщення та напруження, які викликані цими хвилями, необхідно записати у вигляді:

$$v^1=v^{11}+v^{12}\,,\ u^1=u^{11}+u^{12}\,,\ \sigma_x^1=\sigma_x^{11}+\sigma_x^{12}\,,\ \tau_{xy}^1=\tau_{xy}^{11}+\tau_{xy}^{12}\,,\ \sigma_y^1=\sigma_y^{11}+\sigma_y^{12}\,. \tag{16}$$

Перші доданки переміщень та напружень пов'язані з розсіянням поздовжньої хвилі, а другі – поперечної хвилі.

Середня за період кількість енергії $\left\langle I^0\right\rangle_t$, що проходе через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку розповсюдження падаючої хвилі в умовах плоскої деформації має вигляд:

$$\left\langle I^0\right\rangle_t=\frac{\omega}{2}\left\{n_1^0\,\mathrm{Im}(\sigma_x^0+\tau_{xy}^0)(\overline{u}^0+\overline{v}^0)+n_2^0\,\mathrm{Im}(\sigma_y^0+\tau_{xy}^0)(\overline{u}^0+\overline{v}^0)\right\} \tag{17}$$

і залежно від типу хвиль, які розповсюджуються в матриці, дорівнюють:

$$\left\langle I^0\right\rangle_t=0{,}5\omega\mu_1A^2\kappa_2(1+\sin 2\theta_0)\xi^{-1}\,,\ \left\langle I^0\right\rangle_t=0{,}5\omega\mu_1A^2\kappa_2(1-\sin 2\theta_0)\,. \tag{18}$$

Перша формула пов'язана з поширенням поздовжньої хвилі, друга – поперечної хвилі.

Після введення циліндричної поверхні, що містить включення і розглядання її частини одиничної довжини, усереднена швидкість поширення енергії розсіяної хвилі через цю поверхню дорівнює:

$$\left\langle Q_k^1\right\rangle_t=\frac{\omega}{2}\int_0^{2\pi}\left\{n_1\,\mathrm{Im}\left(\sigma_x^{1k}+\tau_{xy}^{1k}\right)\left(\overline{u}^{1k}+\overline{v}^{1k}\right)+n_2\,\mathrm{Im}\left(\sigma_y^{1k}+\tau_{xy}^{1k}\right)\left(\overline{u}^{1k}+\overline{v}^{1k}\right)\right\}d\phi\,.$$

Далі для визначення $\left\langle Q_k^1\right\rangle_t$ у дальній зоні необхідно ввести полярну систему координат $x=R\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, $R=\sqrt{x^2+y^2}$ і знайти асимптотичні формули для переміщень та напружень розсіяного поля поздовжніх і поперечних хвиль, коли $R\to\infty$. Тому

$$\left\langle Q_k^1 \right\rangle_t = \frac{\omega \mu_1 a^2 \pi}{16 n^2} \int_0^{2\pi} f_k(\phi) d\phi, \; k = 1;2 \,. \tag{19}$$

В останній формулі підінтегральні функції залежать як від типу розсіяної хвилі, так і від умов взаємодії включення з матрицею. Отже, вираз для повного поперечного перерізу розсіювання має вигляд:

$$Q_k(\omega) = \frac{a^2 \eta_k \pi}{8 n^2 \kappa_2 A^2 (1 \pm \sin 2\theta_0)} \int_0^{2\pi} f_k(\phi) d\phi, \; \eta_1 = \xi, \eta_2 = 1 \,.$$

Множник η_1 пов’язаний з поширенням поздовжньої хвилі, η_2 – поперечної хвилі.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ВИСНОВКИ

За допомогою останніх формул проведені дослідження залежності значень повного поперечного перерізу розсіювання Q_k від безрозмірної частоти κ_0 при різних співвідношеннях між пружними сталими середовища та включення $e_0 = E_1 / E_0$. Результати цих досліджень для повністю зчепленого включення показані у вигляді графіків на рис. 1 – 5. На цих рисунках криві 1–5 відповідають наступним значенням e_0: 0,5; 0,2; 0,1; 0,01; 0,001. Пунктирна крива на всіх рисунках відповідає випадку абсолютно жорсткого включення.

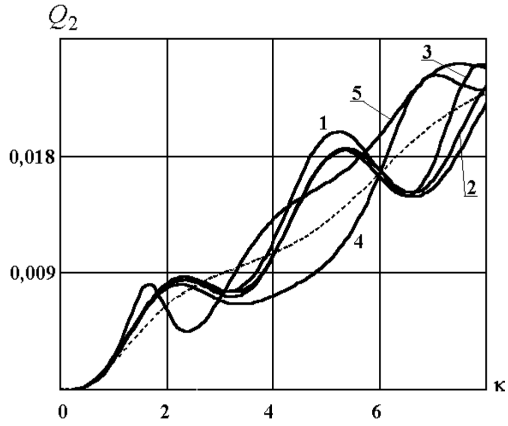

Рис. 1

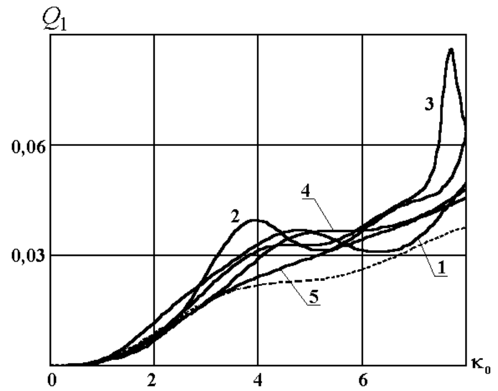

Рис. 2

Якщо на включення набігає хвиля, то від включення розсіюються як поздовжня, так і поперечна хвилі. При поширенні поздовжньої хвилі з $\theta_0 = 90^\circ$ з ростом безрозмірної частоти κ_0 значення поперечних перерізів розсіювання Q_k, $k = 1;2$ зростають. Але значення ППРР розсіяної від включення поздовжньої хвилі при різних співвідношеннях e_0 практично не відрізняються один від одного, тому на рис. 1 наведені графіки почастотної залежності ППРР розсіяної від включення поперечної хвилі. Як видно, майже при всіх значеннях e_0 поперечні перерізи мають декілька максимумів і мінімумів. З зростанням κ_0 значення ППРР для абсолютно жорсткого включення монотонно зростають, а для пружних включень графіки залежності для Q_2 мають осцилюючий характер навколо значень для абсолютно жорсткого включення. При $e_0 \to 0$ значення ППРР прямують до відповідних абсолютно жорсткому включенню значень. Повне співпадіння спостерігається при $e_0 = 10^{-6}$.

Якщо на включення набігає поперечна хвиля з $\theta_0 = 90^\circ$, то ППРР розсіяної поздовж-

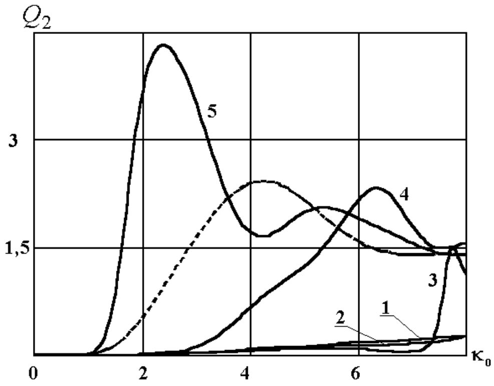

Рис. 3

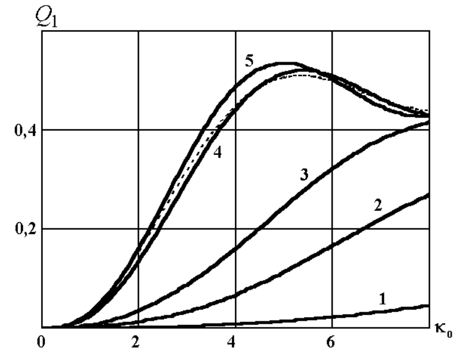

Рис. 4

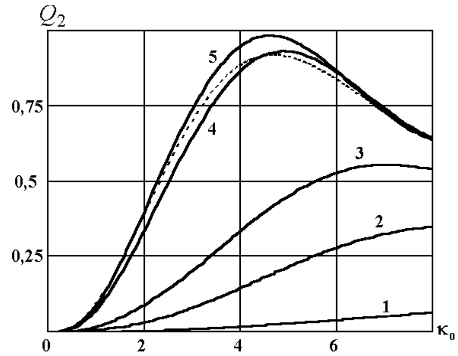

Рис. 5

ньої хвилі Q_1 (рис. 2) також зростають з ростом частоти, але при зростанні e_0 монотонність порушується і з'являються точки максимуму. Крім того, при всіх розглянутих e_0 значення ПППР для пружного включення перевищують відповідні значення для абсолютно жорсткого. Співпадіння значень ПППР для пружного і абсолютно жорсткого включення спостерігається при $e_0 = 10^{-6}$.

На рис. 3 показана поведінка ПППР розсіяної поперечної хвилі у випадку, коли на включення набігає поперечна хвиля з $\theta_0 = 0^\circ$. Для включень з жорсткістю значно більшою жорсткості матриці ПППР спочатку досягають деякого максимального значення, а потім при зростанні частоти значення Q_2 спадають. ПППР для розсіяної поздовжньої хвилі мають не тільки суттєво менші значення, але й більш складний характер залежності від частоти. Якщо ж на включення набігає поздовжня хвиля з $\theta_0 = 0^\circ$, то для ПППР розсіяної від включення поздовжньої хвилі (рис. 4) і ПППР розсіяної поперечної хвилі (рис. 5) спостерігається з ростом κ_0 зростання значень до досягнення максимального значення з наступним повільним спаданням значень, особливо, коли жорсткість включення значно перевищує жорсткість матриці. З ростом жорсткості включення зростають значення поперечних перерізів, прямуючи до відповідних значень для абсолютно жорсткого включення. Співпадіння значень ПППР для пружного і абсолютно жорсткого включень відбувається при $e_0 = 10^{-6}$. Слід відмітити, що ПППР розсіяної від включення поперечної хвилі Q_2 значно перевищують відповідні значення ПППР розсіяння поздовжньої хвилі Q_1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах // К., 1981. – 284 с.
2. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин // Л., 1987. –316 с.
3. Попов В.Г., Улановский А.Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при

прохождении упругих волн через дефекты различной природы // Изв. РАН. МТТ. – 1995. –№4. –С.99-109.

4. Литвин О.В., Попов В.Г. Концентрация напряжений вблизи тонкого упругого включения в условиях гладкого контакта //Известия РАН. Мех.тв. тела, 2007.– №1. – С. 123-132.
5. Литвин О.В., Попов В.Г. Взаємодія плоских пружних гармонічних хвиль з пружним включенням за повного зчеплення // Львів: Фіз.-хім. мех. мат.–2007. – №4.
6. 6.Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях // – М.: Наука, 1985. – 253 с.
7. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитов. – Петрозаводский университет, 1993. – 600 с.
8. Achenbach J.D., Gautesen A.K., McMaken H. Ray methods for waves in elastic solids. – Pitman, Boston, 1982.