

## О ЧАСТОТНЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ МОД В ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ДНОМ В ВИДЕ ПОГЛОЩАЮЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

О.Р. ЛАСТОВЕНКО, В.А. ЛИСЮТИН, А.А. ЯРОШЕНКО

*Севастопольский национальный технический университет, Севастополь*

The hydroacoustic waveguide with attenuation in the bottom half-space is considered. The wave equation and boundary conditions is formulated. The critical modes frequency which is lower then follows from Snell refraction law is defined from dispersion equation. The proper modes of waveguide consist of “dissipation” and “trapped” modes. The frequency characteristics of phase and group velocity is defined. It is shown that when the attenuation is large then near the critical frequency there is area of anomalous phase velocity dispersion.

### ВВЕДЕНИЕ

Решение волнового уравнения для акустического поля в изоскоростном канале, лежащем на однородном жидком полупространстве было получено К. Пекерисом более полувека назад. Однако задача Пекериса оказалась актуальной для теоретической гидроакустики и обсуждается по сей день. Проблема заключается в её сингулярности по двум координатам, отборе единственности решения и способе проведения разреза в плоскости комплексно-волновых чисел. Решение Пекериса основано на существовании «критической частоты» для каждой моды, что следует из закона Снелля и определяет вещественный спектр волновых чисел для «захваченных» каналом мод [1-3].

В последующие годы та же задача была решена несколько в иной постановке, изначально предполагающей наличие хотя бы малого поглощения в донном полупространстве, комплексный спектр волновых чисел и другими способами проведённые разрезы [4-6]. Но пропорционально-частотная зависимость величины поглощения в дне противоречит требованию малости мнимой части волновых чисел. При не малом поглощении понятие о «критической частоте» частично утрачивает смысл.

Основная сложность решения, если не требовать малости поглощения – в поиске и отборе корней дисперсионного уравнения. Критерием захвата нормальной волны каналом должен служить уже не бриллюэновский угол скольжения, а расположение решения дисперсионного уравнения внутри контура интегрирования [6].

В этом случае спектр «собственных» мод волновода состоит из «захваченных» и «диссипативных», причем при увеличении частоты мода проявляется сначала как диссипативная, а затем как захваченная. Диапазон частот, в котором мода существует как диссипативная, лежит ниже её критической частоты, рассчитанной из закона Снелля и расширяется при увеличении затухания в полупространстве.

### 1 ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ

Волновое уравнение в Декартовых координатах для областей «1» (водный слой с плотностью  $\rho_1$ , скоростью звука  $c_1$ ) и «2» (донное полупространство с параметрами соответственно  $\rho_2$ ,  $c_2$ ) для линейного горизонтального бесконечного источника единичной мощности [6]:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \delta(z - z_0) \cdot \delta(x) \cdot \delta(t); \quad 0 \leq z \leq h,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0; \quad z > h,$$

где  $\Phi_j = \Phi_j(x, z, t)$  потенциал скорости в соответствующей области,  $\delta$  - дельта-функция Дирака,  $z$  - глубина, отсчитанная от поверхности, ось направлена вниз, глубина источника  $z = z_0$ ,  $x$  - горизонтальное расстояние,  $h$  - глубина водного слоя,  $c_1$  и  $c_2$  - скорости звука в соответствующих областях.

Граничные условия определяют непрерывность звукового давления и нормальной составляющей колебательной скорости, что выражается условиями:

$$\Phi_1(z=0) = 0, \quad \rho_1 \Phi_1 = \rho_2 \Phi_2, \quad \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right|_{z=h}.$$

Для потенциала скорости  $\Psi$  гармонического источника интегральное выражение для поля может быть записано в виде [1-3,6]:

$$\Psi_1(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(b_1, b_2)}{D} \cdot e^{i\zeta x} d\zeta, \quad 0 \leq z \leq h, \quad (1)$$

$$\text{и} \quad \Psi_2(z, \omega) = \frac{1}{2\pi m_{21}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2(b_1, b_2)}{D} \cdot e^{i\zeta x} d\zeta,$$

где  $\Psi_j = \Psi_j(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(x, z, t) e^{-i\omega t} dt$ ,  $\Phi_j = \Phi_j(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(z, \omega) d\omega$ ;  $\zeta$ ,  $b_j$ ,  $k_j$ ,  $j=1,2$  - горизонтальное, вертикальное волновое и волновое число в соответствующих областях,  $\sqrt{k_j^2 - \zeta^2} = b_j$ . В (1)  $F_1(b_1, b_2) = \{ \sin(b_1 z_{<}) / b_1 \} \times \{ b_1 \cos(b_1(h - z_{>})) + i b_2 \sin(b_1(h - z_{>})) / m_{21} \}$ ,  $F_2(b_1, b_2) = \sin(b_1 z_0) e^{-i b_2(z-h)}$ ,  $z_{>}$  ( $z_{<}$ ) соответствует координате  $z$  выше (ниже) координаты  $z_0$  источника;  $m_{21} = \rho_2 / \rho_1$  - отношение плотностей среды полупространства и водного слоя;

$$D = b_1 \cos(b_1 h) + i b_2 \sin(b_1 h) / m_{21}. \quad (2)$$

При учете поглощения в полупространстве волновое число  $k_2$  будет комплексным:

$$k_2 = \omega / c_2 - i\beta, \quad (3)$$

где  $\text{Re}(k_2) = \omega / c_2$ ,  $\beta$  - показатель затухания, величина которого определяется физическими свойствами дна.

Интегралы Фурье (1) составляют точное выражение для поля линейного источника. Они являются аналогами решения в виде преобразования Ханкеля для точечного источника, полученные Пекерисом [1] и отличаются только ядрами интегральных преобразований - экспонента для линейного и функция Ханкеля для точечного источника. Уравнения (1) удовлетворяют требованию условия излучения, если  $\text{Im}(b_2) < 0$  [6].

Для решения интегралов (1) и выражения поля в виде суммы мод в комплексной плоскости горизонтально-волновых чисел проведен гиперболический разрез по типу ЮЖП-разреза, охватывающий все особенности подынтегрального выражения, включающие точки ветвления и полюсы [6].

## 2 О ПОКАЗАТЕЛЕ ЗАТУХАНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Измеренную тем или иным способом величину потерь энергии при распространении акустических волн в грунтах принято характеризовать коэффициентом затухания  $\alpha$ , измеряемом в дБ/км (дБ/м) на определенной частоте [7,8]. Показатель затухания  $\beta$ , измеряемый в  $\text{м}^{-1}$ , связан с коэффициентом затухания формулой:  $\beta \approx \alpha/868$  ( $\beta \approx \alpha/0.868$ ). Однако для акустических расчетов эти величины неудобны вследствие прямо пропорциональной частотной зависимости, что подтверждается данными измерений [7].

Будем называть приведенным (к частоте 1 Гц) коэффициентом и показателем затухания отношение величин  $\alpha$  и  $\beta$  к частоте  $f_0$ , на которой производилось измерение:  $\alpha_1 = \alpha(f_0)/f_0$ , дБ/м/Гц,  $\beta_1 = \beta(f_0)/f_0$ ,  $\text{м}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$ . Тогда  $\alpha(f) = \alpha_1 \cdot f$ ,  $\beta(f) = \beta_1 \cdot f$ . Записывая (3) в виде:

$$k_2 = \frac{2\pi f}{c_2} \left(1 - i \frac{c_2}{2\pi} \cdot \beta_1\right) = \frac{2\pi f}{c_2} (1 - i\gamma), \quad (4)$$

где  $\gamma = \frac{c_2 \beta_1}{2\pi}$ , получим зависящую не от частоты, а от только от физических параметров грунта величину  $\gamma$ , которую, как видно из (4), можно назвать «тангенсом угла потерь».

Величина тангенса угла потерь в зависимости от типа грунта может меняться в пределах 0.01...0.35 [6,7].

## 3 ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ, КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА И КЛАССИФИКАЦИЯ МОД

Знаменатели (2) подынтегральных выражений (1) одинаковы и определяют положение полюсов на плоскости комплексно-волновых чисел. Нули знаменателя являются корнями дисперсионного уравнения, полученного Пекерисом [2]:  $\text{tg}(b_{1l}h) = i b_{1l} m_{21} / b_{2l}$ . Здесь второй нижний индекс ( $l$ ) соответствует номеру моды. Вследствие смещения контура интегрирования точки ветвления вертикального волнового числа  $b_2 = \pm k_2$  в плоскости горизонтально-волновых чисел попадают во 2 и 4 квадранты и волновые числа оказываются связаны друг с другом:  $\xi_l = -\sqrt{k_1^2 - b_{1l}^2}$ ,  $b_{2l} = -\sqrt{k_2^2 - \xi_l^2}$ .

Преобразуем дисперсионное уравнение, исключая вертикальное волновое число полупространства:  $\text{tg}(b_{1l}h) = -b_{1l} m_{21} / \sqrt{k_1^2 - k_2^2 - b_{1l}^2}$ . Здесь действительная часть корня должна быть положительной. Запишем последнее уравнение в виде:

$$b_{1l}h = l\pi - \text{arctg} \frac{b_{1l} m_{21}}{\sqrt{k_1^2 - k_2^2 - b_{1l}^2}}, \quad l = 1, 2, \dots, l_m, \quad (5)$$

где  $l_m$  – максимальный номер моды, если (5) решается для фиксированной частоты.

При наличии хотя бы малого поглощения волновые числа и скорость звука в полупространстве комплексны. В этом случае критерием захвата нормальной волны каналом служит уже не бриллюэновский угол скольжения  $\chi_l$ , а расположение корня уравнения (5) внутри или вне контура интегрирования. Тогда дискретный спектр «собственных» мод волновода можно разделить на «диссипативные» и «захваченные». Для диссипативных мод  $\chi_l > \chi_c$ , для захваченных  $\chi_l < \chi_c$ , где  $\chi_c = \arccos c_1/\text{Re}(c_2)$  – критический угол скольжения. На частотах, на которых  $\chi_l > \chi_c$  мода будет диссипативной, а на более высоких, когда  $\chi_l < \chi_c$  – захваченной. Пропорционально-частотная зависимость величины

потерь в грунте приводит к возрастанию мнимой части волновых чисел и означает, что высшие моды проявляются, начиная с гораздо меньших, по сравнению с ожидаемыми из закона Снелля частот.

Для определения комплексных корней (5) был применен итерационный алгоритм Ньютона-Рафсона [9,10]. Превышение критической частоты и проявление моды как «собственной», первоначально «диссипативной», идентифицировалось следующим образом. Чтобы находится внутри контура интегрирования, величина мнимой части вертикального волнового числа в полупространстве должна быть отрицательной.

Графики зависимости критической частоты от тангенса угла потерь  $\gamma$  в грунте приведены на рис.1. По оси ординат отложены значения относительной критической частоты  $\Omega$ , умноженной на номер моды. Частота  $\Omega$  здесь определена как отношение критической частоты  $f_{cr}(\gamma)$ , полученной при решении уравнения (5) к критической частоте, следующей из закона Снелля  $f_c$ :  $\Omega = f_{cr}(\gamma)/f_c$ ,  $f_c = \frac{c_1(l-0.5)}{2h\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}}$ .

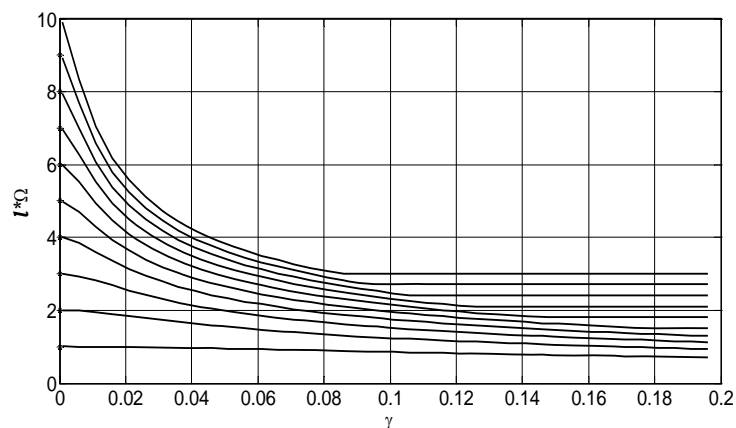


Рис.1

Из рис.1 видно, что чем больше номер моды, тем значительнее влияние поглощения в полупространстве. При  $\gamma \approx 0.02$  (характерно для алевроитовых глин) и  $\gamma \approx 0.2$  (песок мелкозернистый) критическая частота десятой моды уменьшается до  $\approx 58\%$  и  $\approx 36\%$  от ожидаемых из закона Снелля. Учитывая неглубокое проникновение в дно высших мод, существующая реально слоистость, вероятно, не окажет существенного влияния. При увеличении затухания в грунте критическая частота мод снижается до некоторого предела, после чего уже не изменяется - «насыщение» процесса. Величина «поглощения насыщения» уменьшается с ростом номера моды.

#### 4 ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

Фазовую и групповую скорости мод  $v_l$  и  $u_l$  акустической волны для волновода с поглощающим дном следует определить как:

$$v_l = \omega / \text{Re}(\xi_l), \quad u_l = \partial \omega / \partial (\text{Re}(\xi_l)). \quad (6)$$

Формулу для групповой скорости можно также записать в виде:  $u_l = \frac{v_l}{1 - \zeta_l \frac{\partial v_l}{\partial \omega}}$ ,

откуда видно, что в зависимости от знака  $\partial v_l / \partial \omega$  групповая скорость моды может быть и больше фазовой. Нормальная дисперсия фазовой скорости соответствует  $\partial v_l / \partial \omega < 0$  и  $u_l < v_l$ . Дисперсию фазовой скорости, если  $\partial v_l / \partial \omega > 0$  и  $u_l > v_l$  считают [11] аномальной.

Графики частотных зависимостей фазовой и групповой скоростей, рассчитанные по определениям (6) для 5 мод при различных величинах  $\gamma$  приведены на рис.2.

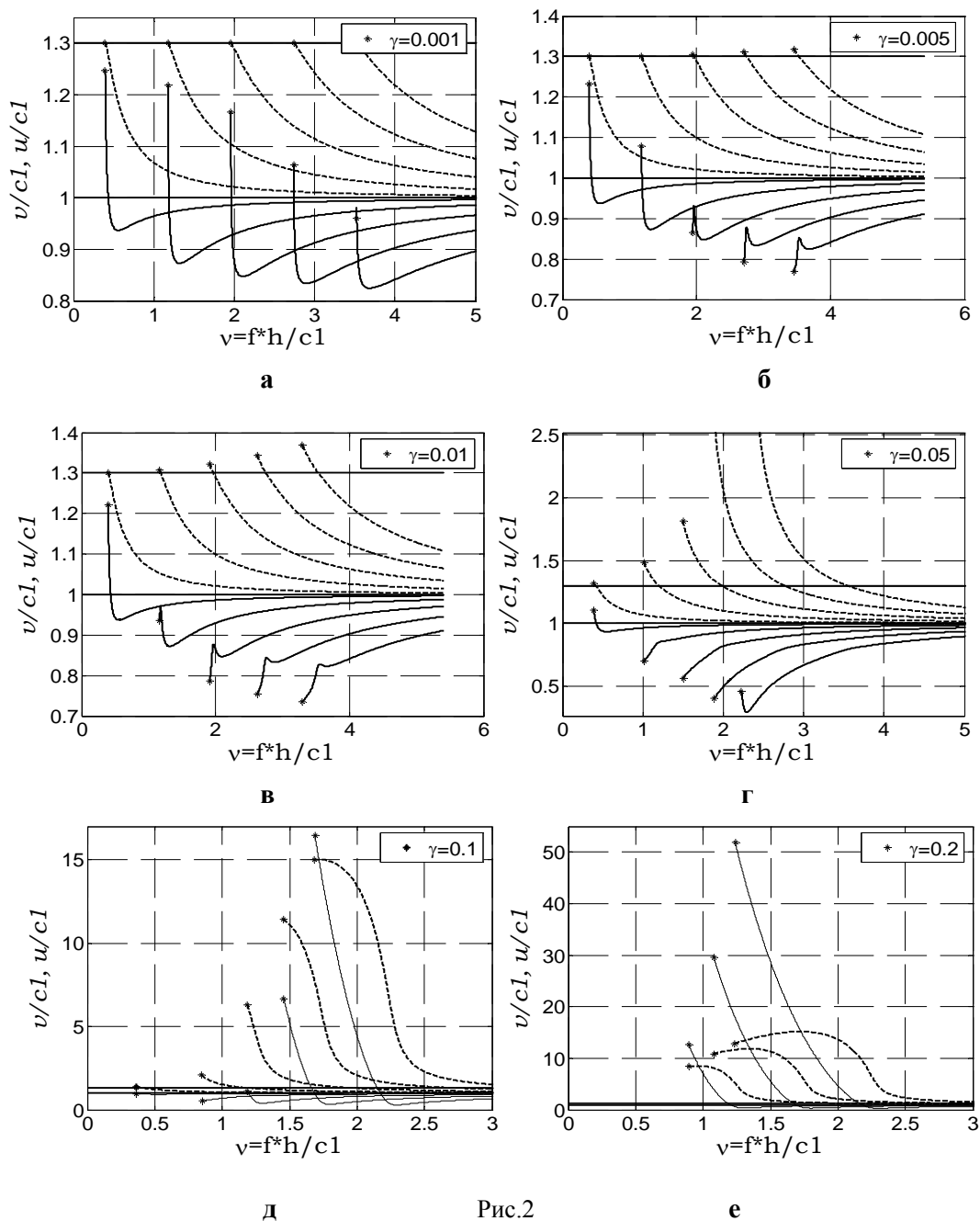


Рис.2

По оси абсцисс отложена «параметрическая» безразмерная частота  $v=fh/c_1$ , ординат – отношение фазовой или групповой скорости к скорости звука в воде. Горизонтальными сплошными линиями отмечены скорости звука в воде ( $c_1$ ) и грунте ( $c_2$ ). Значения показателя преломления и относительной плотности соответственно:  $n=c_2/c_1=1.3$ ,  $m_{21}=2$ . Сплошные кривые соответствуют групповой ( $u$ ), пунктирные – фазовой ( $v$ ) скоростям.

Рис.2 а. Затухания почти нет,  $\gamma=0.001$ . Графики имеют почти классический вид [1-3], на критической частоте  $v_f=c_2$ , однако  $u_f$  несколько меньше, чем  $c_2$ , причем тем меньше, чем больше номер моды. На графике групповой скорости пятой моды уже заметен незначительный участок «диссипативности».

Рис.2 б, в. Очень малое ( $\gamma=0.005$ ) и малое ( $\gamma=0.01$ ) затухание. Фазовые скорости 2-5 мод вблизи критической частоты начинают возрастать, а групповые на участке диссипативности – уменьшаться, причем частотные зависимости групповой скорости имеют два экстремума.

Рис.2 г, д, е. При дальнейшем увеличении затухания картина качественно меняется. Возникает участок аномальной дисперсии, на котором групповая скорость превышает фазовую. Причиной аномальной дисперсии является достаточно большое поглощение энергии полупространством в узком диапазоне частот.

## ВЫВОДЫ

1. В мелком море, на фиксированной частоте, оказывающими вклад в звуковое давление может оказаться большее число мод, чем следует из расчетов, основанных на законе Снелля. Число возбуждающихся мод увеличивается с ростом затухания в грунте.
2. При распространении широкополосных сигналов в волноводе возможно появление специфических искажений вследствие существования участков аномальной дисперсии фазовой скорости.
3. Отмеченную аномальную дисперсию, вероятно, следует классифицировать как «волноводно-материальную» или «геометро-физическую», поскольку она возникает за счет физических (материальных) свойств среды, но лежащих за (для волновода Пекериса) геометрическими границами волновода [11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пекерис К. Теория распространения звука взрыва в мелкой воде. // Распространение звука в океане. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
2. Толстой И. Акустика океана. Теория и эксперимент в подводной акустике: Пер. с англ. / И. Толстой, К.С. Клей. – М.: Мир, 1969.- 301с.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973.- 343 с.
4. Акустика океана: Пер. с англ. / Под ред. Дж. Де Санто – М.: Мир, 1982.-318с.
5. Касаткин Б.А. Сравнительный анализ альтернативных решений задачи Пекериса в корректной постановке (обзор) / Б.А. Касаткин, Н.В. Злобина // Акустика океана. Доклады XI-ой школы-семинара акад. Л.М. Бреховских, XVII сессия РАО –М.: Геос, 2006.-С.86-91.

6. Buckingham M.J. On the acoustic field in a Pekeris waveguide with attenuation in the bottom half-space / M.J. Buckingham, E.M. Giddens // J. Acoust. Soc. Am., 2006, January, Vol. 119, № 1, P.123-147.
7. Гамильтон Э.Л. Геоакустические модели морского дна / Э.Л. Гамильтон // Акустика морских осадков / Под ред. Л. Хэмптона – М.: Мир, 1977.-С.176-211.
8. Чабан И.А. Затухание звука в грунтах и горных породах / И.А. Чабан // Акуст. журн., 1993, Т.39, Вып.2, С.362-369.
9. Мэтьюз Д, Финк К. Численные методы. Использование MATLAB.:Пер. с англ.- М.:”Вильямс”,2001.-720с.
10. Ануфриев И.В., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7.-СПб.:БХВ-Петербург, 2005.-1104с.
11. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973.- 495с.