ВТОРЫЕ ГАРМОНИКИ НОРМАЛЬНЫХ SH ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ С РАЗНОТИПНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ.

А.А. КУСЛИВАЯ, В.И. СТОРОЖЕВ,
Донецкий национальный университет,
83055, Донецк, ул. Унивеситетская, 24

ВВЕДЕНИЕ.

Вопросам анализа нелинейных эффектов при распространении нормальных упругих волн малой интенсивности в анизотропных упругих волноводах посвящен ограниченный круг исследований. Актуальная в теоретическом и прикладном отношениях проблема описания свойств нелинейных нормальных волн в упругих волноводах пространственного геометрического строения остается на сегодняшний день открытой по многим аспектам из-за чрезвычайной сложности неоднородных краевых задач, которые описывают данные волновые эффекты.

В данной работе рассматривается задача определения нелинейных ангармонических возмущений для нормальных волн, которые распространяются в плоскопараллельном анизотропном упругом волноводе (слое пространственной геометрии толщиной 2h) из материала кубической системы. Материалом волновода является монокристалл класса m3m. На плоских граничных поверхностях (гранях слоя) задаются разнотипные краевые условия: одна грань, по предположению, свободна, а вторая жестко закреплена. Данные условия заключаются в равенстве нулю напряжений на одной грани и упругих волновых смещений в плоскости другой грани.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Модель нелинейных волновых процессов в рассматриваемом волноводе базируется на представлении упругого потенциала U

$$U = \frac{1}{2} c_{jqrk} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{rk} + \frac{1}{6} c_{jqrklm} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{rk} \varepsilon_{lm}; \tag{1}$$

и нелинейных представлениях компонент тензора упругих деформаций

$$\varepsilon_{rk} = \frac{1}{2}\left(u_{r,k} + u_{k,r} + u_{l,r} u_{l,k} \right), \ u_{r,k} = \partial u_r / \partial x_k . \tag{2}$$

Нормированные компоненты тензора механических напряжений σ_{jd} представляются в виде суммы линейных и нелинейных составляющих

$$\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d} = \sigma_{jd}^{(0)} + \sigma_{jd}^{(1)}, \tag{3}$$

где

$$\sigma_{jd}^{(0)} = c_{jdrk} u_{r,k}; \ \sigma_{jd}^{(1)} = \frac{1}{2} c_{jdrk} u_{l,r} u_{l,k} + c_{pdrk} u_{j,p} u_{r,k} + \frac{1}{2} c_{jdrklm} u_{r,k} u_{l,m} .$$

Тензоры упругих постоянных второго и третьего порядков монокристаллического материала слоя в рассматриваемом случае характеризуются соответственно тремя независимыми постоянными второго порядка $\tilde{c}_{ij}$, шестью независимыми постоянными третьего порядка $\tilde{c}_{ijk}$.

Тензорные уравнения движения для рассматриваемого волновода имеют вид

$$\rho \ddot{u}_j - \sigma^{(0)}_{jd,d} = \sigma^{(1)}_{jd,d} \quad \left(j = \overline{1,3}\right). \tag{4}$$

На граничных поверхностях $x_3 = \pm h$ формируются граничные условия вида:

$$\left(\sigma^{(0)}_{3j}\right)_{x_3=+h} + \left(\sigma^{(1)}_{3j}\right)_{x_3=+h} = 0, \quad \left(u_j\right)_{x_3=-h} = 0 \qquad \left(j = \overline{1,3}\right). \tag{5}$$

Задачи (4), (5) описывают спектры и свойства мод исследуемых свободных однородных и краевых стоячих нелинейных нормальных волн в анизотропном кристаллическом слое кубической системы.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВТОРЫХ ГАРМОНИК НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН.

Анализ нелинейных волновых эффектов в рассматриваемом волноводе основывается на методике определения нелинейных «добавок» в представлениях функций волновых упругих смещений пропорциональных малому параметру – акустическому числу Маха, которые определяют как нелинейные ангармонические возмущения разных порядков или так называемые высшие гармоники стационарных упругих волн.

По этой методике компоненты вектора упругих волновых смещений представляются в виде ряда:

$$u_j = \sum_{k=0}^{n} u_j^{(k)}, \tag{6}$$

в котором $\left|u_j^{(k)}\right| \sim \delta \left|u_j^{k-1}\right|$, δ - Маха.

На основе выделения в равенствах составляющих одного порядка по малому параметру δ формируется рекуррентная последовательность краевых задач для уравнений вида

$$\rho \ddot{u}_j^k - \left(\sigma^{(0)}_{jd,d}\right)_{u=u^{(k)}} = \left(\sigma^{(1)}_{jd,d}\right)_{u=u^{(k-1)}} \quad \left(k \ge 1\right), \quad \left(j = \overline{1,2}\right) \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\left(\left(\sigma^{(0)}_{3j}\right)_{u=u^{(k)}}\right)_{x_3=+h} + \left(\left(\sigma^{(1)}_{3j}\right)_{u=u^{(k-1)}}\right)_{x_3=+h} = 0, \quad \left(u_j^{(k)}\right)_{x_3=-h} = 0 \qquad \left(j = \overline{1,3}\right). \tag{8}$$

Из рекуррентной последовательности краевых задач (7), (8) с учетом используемого представления U корректно могут быть найдены только составляющие $u_j^{(0)}$ и $u_j^{(1)}$, соответственно определяемые из линейной спектральной краевой задачи

$$\rho \ddot{u}_j^{(0)} - c_{jdkr} u^{(0)}_{r,dk} = 0, \quad \left(\sigma^{(0)}_{32}\right)_{x_3=h} = 0, \quad \left(u^{(0)}_2\right)_{x_3=-h} = 0, \quad \left(j = \overline{1,2}\right), \tag{9}$$

и неоднородной краевой задачи

$$\rho\ddot{u}_j^{(1)} - c_{jdkr}u_{r,dk}^{(1)} = c_{jdkr}u_{r,dk}^{(0)}u_{l,r}^{(0)} +$$
$$+c_{pdrk}(u_{j,dp}^{(0)}u_{r,k}^{(0)} + u_{r,dk}^{(0)}u_{j,p}^{(0)}) + c_{jdrklm}u_{r,dk}^{(0)}u_{l,m}^{(0)},$$
$$\left(\sigma_{31}^{(0)}\right)_{x_3=h} + \left(\sigma_{31}^{(1)}\right)_{x_3=h} = 0,\ \left(\sigma_{33}^{(0)}\right)_{x_3=h} + \left(\sigma_{33}^{(1)}\right)_{x_3=h} = 0,$$
$$\left(u_1^{(1)}\right)_{x_3=-h} = 0,\ \left(u_3^{(1)}\right)_{x_3=-h} = 0.\quad \left(j = \overline{1,2}\right). \tag{10}$$

Из решения задачи линейной задачи (9) следует описание моды с номером n в линейном спектре нормальных SH-волн в упругом слое кубической системы

$$u_{2n}^{(0)} = \left(f_{1n}\cos\left(\alpha_n x_3\right) + f_{2n}\sin\left(\alpha_n x_3\right)\right)E(x_1, t, \omega, k),\ \left(n = \overline{1,\infty}\right), \tag{11}$$
$$\alpha_n = (2n-1)\pi/(4h);\ k_n = \sqrt{\left(\Omega^2 - c_{44}\alpha_n^2\right)/c_{44}};\ \Omega^2 = \rho c_*^{-1}R_*^2\omega^2,$$

где Ω является безразмерным параметром, а f_{jn} определяются из соотношений

$$f_{1n} = G_n\sin\left(\alpha_n h\right),\ f_{2n} = G_n\cos\left(\alpha_n h\right),$$

а G_n является произвольной константой – амплитудной характеристикой.

Соответствующая задача для определения ангармонических возмущений $u_{jn}^{(1)}$ принимает вид

$$\rho\ddot{u}_1 - c_{11}u_{1,11}^{(1)} - \Delta_8 u_{3,31}^{(1)} - c_{44}u_{1,33}^{(1)} = \beta_{1n}(x_3)E(x_1, t, 2\omega, 2k_n),$$
$$\rho\ddot{u}_2^{(1)} - c_{44}(u_{2,11}^{(1)} + u_{2,33}^{(1)}) = 0, \tag{12}$$
$$\rho\ddot{u}_{3n} - c_{11}u_{3n,33}^{(1)} - \Delta_8 u_{1n,13}^{(1)} - c_{44}u_{3n,11}^{(1)} = \beta_{3n}(x_3)E(x_1, t, 2\omega, 2k_n);$$
$$\left(\sigma_{31}^{(0)}\right)_{x_3=h} + \left(\sigma_{31}^{(1)}\right)_{x_3=h} = 0,\ \left(\sigma_{33}^{(0)}\right)_{x_3=h} + \left(\sigma_{33}^{(1)}\right)_{x_3=h} = 0,$$
$$\left(u_1^{(1)}\right)_{x_3=-h} = 0,\ \left(u_3^{(1)}\right)_{x_3=-h} = 0.\quad \left(j = \overline{1,2}\right). \tag{13}$$

В соотношениях (12) –(13)

$$\beta_{1n}\left(x_3\right) = A_{1n} + a_{11n}\cos[2\alpha_n x_3] + a_{12n}\cos[2\alpha_n x_3],$$
$$\beta_{3n}\left(x_3\right) = a_{21n}\sin[2\alpha_n x_3] + a_{22n}\cos[2\alpha_n x_3].$$

Качественный анализ задачи (12)-(13) показывает, что вторыми гармониками, которые сопровождают распространение нормальных SH-волн, являются только волны P-SV-типа с удвоенной частотой. Компонента $u_{2n}^{(1)}$ в данном случае равна 0.

Полное решение неоднородной системы уравнений (12)-(13) состоит из суммы её частного решения $\tilde{u}_{jq}^{(1)}$ и общего решения $\hat{u}_{jq}^{(1)}$ соответствующей однородной системы:

$$u_{1n}^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right) = \tilde{u}_{1n}^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right) + \hat{u}_{1n}^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right), \tag{14}$$
$$u_{3n}^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right) = \tilde{u}_{3n}^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right) + \hat{u}_{3n}^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right).$$

Частное решение неоднородной системы (13)-(14) получено в виде

$$\tilde{u}_{1n}^{(1)}\left(x_1,x_3,t\right)=\left(\mu_{1n}+\mu_{2n}\cos[2\alpha_n x_3]+\mu_{3n}\sin[2\alpha_n x_3]\right)E(x_1,t,2\omega,2k_n),$$

$$\tilde{u}_{3n}^{(1)}\left(x_1,x_3,t\right)=\left(\mu_{4n}\sin[2\alpha_n x_3]+\mu_{5n}\cos[2\alpha_n x_3]\right)E(x_1,t,2\omega,2k_n). \qquad (15)$$

Общее решение однородной системы уравнений (12)-(13) имеет структуру:

$$\breve{u}_{1n}^{(1)}\left(x_1,x_3,t\right)=\left(V_{11n}\cos[\chi_{1n}x_3]+V_{12n}\cos[\chi_{2n}x_3]+V_{13n}\sin[\chi_{1n}x_3]+\right.$$
$$\left.+V_{14n}\sin[\chi_{2n}x_3]\right)E(x_1,t,2\omega,2k_n),$$

$$\breve{u}_{3n}^{(1)}\left(x_1,x_3,t\right)=\left(V_{31n}\sin[\chi_{1n}x_3]+V_{32n}\sin[\chi_{2n}x_3]+V_{33n}\cos[\chi_{1n}x_3]+\right.$$
$$\left.+V_{34n}\cos[\chi_{2n}x_3]\right)E(x_1,t,2\omega,2k_n), \qquad (16)$$

Параметры χ_{1n} и χ_{2n} здесь являются корнями биквадратного характеристического уравнения:

$$c_{11}c_{44}\chi_n^4+4\chi_n^2\left(-\left(c_{11}+c_{44}\right)\Omega^2+\left(c_{11}^2-c_{12}^2-2c_{12}c_{14}\right)k_n^2\right)+$$
$$+16\left(\Omega^2\left(\Omega^2-k_n^2\left(c_{11}+c_{44}\right)\right)+16c_{11}c_{44}k_n^4\right)=0. \qquad (17)$$

Коэффициенты в представлениях (16) определяются из граничных условий.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Построенное аналитическое решение позволяет провести анализ кинематических закономерностей, свойственных явлению возникновения нелинейных ангармонических возмущений для линейных мод нормальных SH-волн в волноводах с разностными краевыми условиями.

Первоочередные вопросы численного анализа нелинейных вторых гармоник касаются закономерностей изменения их амплитудно-частотных характеристик. При этом особый интерес для изучения представляет анализ эффектов резкого возрастания нормированных интенсивностей волновых движений в ангармонических возмущениях в окрестности определенных частот. Такие эффекты можно характеризовать как резонансное возбуждение вторых гармоник.

Эти эффекты выявляются при анализе частотных зависимостей в представлениях $u_{1n}^{(1)}$ и $u_{3n}^{(1)}$, представленных в частности на рисунке 1 и 2 для величин $U_j=\left|u_{jn}^{(1)}\right|_{x_3=0.6}$ от значений приведенного частотного параметра в случае, когда линейная монохроматическая нормальная SH волна принадлежит моде n=1 нормальных волн.

Проанализировав аналитически частотные зависимости в представлении $u_{1n}^{(1)}$ от значений приведенного частотного параметра нормальной монохроматической линейной SH волны моды для слоя с гибкими нерастяжимыми покрытиями граней, можно отметить, что при $\Omega=k_n\sqrt{c_{11}/\rho}$ наблюдается резкое возрастание нормированных интенсивностей волновых движений, связанные с неограниченным возрастанием параметра μ_{1n}, при обращении в ноль его знаменателя при $\Omega=k_n\sqrt{c_{11}/\rho}$. Но данная зависимость представляет собой уравнение моды продольной объемной волны вдоль направления OX_1 монокристалла германия. Таким образом, при совпадении фазовых скоростей объемных продольных и нормальных поперечных SH волн наблюдается резонансное возбуждение вторых гармоник.

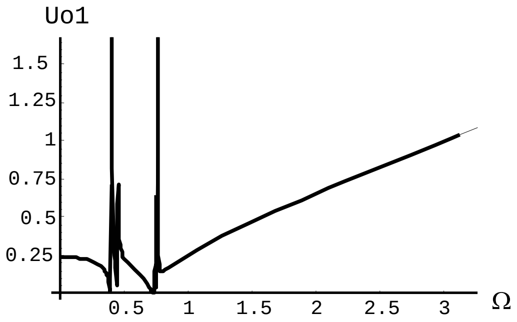

Рис. 1

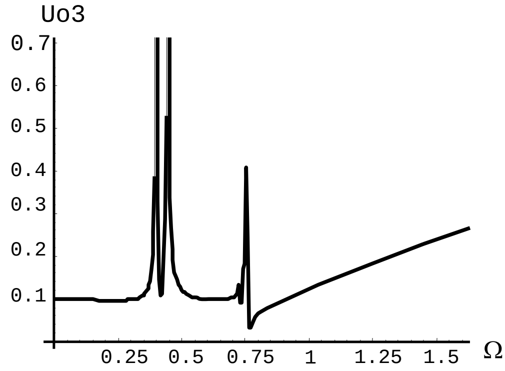

Рис. 2

Представляет также интерес сопоставительный анализ соотношений между интенсивностями линейной нормальной SH волны и её второй гармоники. Соответствующие расчеты в частности проведены для волн, которые принадлежат низшей моде линейного спектра нормальных SH-волн при значениях нормированной частоты $\Omega_k = \Omega_k + \Delta\Omega k$, где $k = \overline{1,15}$, и отражены в нижеследующей таблице 1.

Табл 1.

Ω_k	$\breve{u}_{2n}^{(0)} = \left\|u_{2n}^{(0)}\right\| / G_n$	$\breve{u}_{1n}^{(1)} = \left\|u_{1n}^{(1)}\right\| / G_n^2$	$\breve{u}_{3n}^{(1)} = \left\|u_{3n}^{(1)}\right\| / G_n^2$
1.7	1	0.56281	0.333049
1.9	1	0.642085	0.369987
2.1	1	0.720974	0.406788
2.3	1	0.799622	0.443504
2.5	1	0.878137	0.480168
2.7	1	0.956593	0.51681
2.9	1	1.03505	0.55345
3.1	1	1.11354	0.590109
3.3	1	1.19211	0.626803
3.5	1	1.27078	0.663548
3.7	1	1.34956	0.700361
3.9	1	1.42848	0.737254
4.1	1	1.50754	0.778193
4.3	1	1.58675	0.819878
4.5	1	1.66613	0.861822

На основании этих расчетов в частности можно сделать вывод, что амплитуды компонент $u_{1n}^{(1)}$ и $u_{3n}^{(1)}$ второй гармоники имеют порядок, приблизительно равный квадрату амплитуды компоненты $u_{2n}^{(0)}$.

Одним из принципиально важных моментов исследования является анализ энергетических характеристик ангармонических возмущений нормальных волн. Основными величинами, которые характеризуют энергетику гармонических волновых движений частоты ω, являются плотности средних за период потоков мощности. Расчетные соотношения для этих характеристик имеют форму

$$P_j = \frac{-i\,\omega}{4} R_* c_* \left(\sigma_{j1} u_1^* + \sigma_{j2} u_2^* + \sigma_{j3} u_3^* - \sigma_{j1}^* u_1 - \sigma_{j2}^* u_2 - \sigma_{j3}^* u_3\right) \quad \left(j = \overline{1,3}\right),$$

где σ_{ji} и u_j – комплексные амплитудные характеристики соответственных полей механических напряжений и волновых упругих смещений, а через $(\text{-})^*$ обозначена операция комплексного сопряжения.

На рис. 3 приведено распределение максимальных по толщине нормированных значений среднего за период потока мощности волновых движений вдоль направления распространения Ox_1 в линейных SH-волнах первуй моды, которое характеризуется показателем

$$\tilde{P}_l^{(0)} = \max_{x_3} \left| P_l^{(0)}\left(x_1, x_3, t\right)\right|,$$

а на рис. 4 – распределение энергетического показателя

$$\tilde{P}_l^{(1)} = \max_{x_3} \left| P_l^{(1)}\left(x_1, x_3, t\right)\right| / G_n^2,$$

который характеризует поток мощности для вторых гармоник нормальных волн для слоя с разнотипными краевыми условиями.

Рис. 3

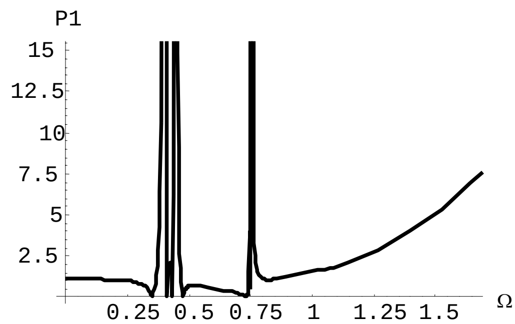

Рис 4

Если исследованная интенсивность потоков мощности в линейных волнах почти пропорциональна частоте, то для волн вторых гармоник распределение максимальных значений потоков мощности является в некоторой степени подобным к распределению интенсивностей максимальных уровней амплитудных функций в этих гармониках.

ВЫВОДЫ.

На основании проведенных аналитических и численных исследований в данной работе в аналитической форме с помощью методов компьютерной алгебры получены представления, описывающие напряженности вторых гармоник (нелинейных ангармонических возмущений) нормальных волн из любой моды SH спектра для монокристаллического слоя кубической системы с разнотипными краевыми условиями. Проанализированы отдельные амплитудно-частотные эффекты для исследуемых вторых гармоник. В частности установлено, что в достаточно широком исследованном частотном спектре амплитуда смещения $u_{3n}^{(1)}$ второй гармоники пропорциональна квадрату амплитуды линейной нормальной волны с коэффициентами в диапазоне от 0.33 до 0.88, а амплитуда смещения $u_{1n}^{(1)}$ второй гармоники пропорциональна квадрату амплитуды линейной нормальной волны с коэффициентами в диапазоне от 0.56 до 1.66 в случае ся с разнотипными краевыми условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куренная К. Частное решение спектральной задачи для второй гармоники взаимодействующих SH-волн в слое // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 188-194.
2. Лейбфрид С. Г., Людвиг В. Теория ангармонических эффектов в кристаллах. – М.: ИЛ, 1963. – 231 с.
3. Космодамианский А. С., Сторожев В. И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.