ОБ ОДНОМ КОРРЕКТНОМ РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ПОДВИЖНЫХ ПРОНИЦАЕМЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.С. КРУТИКОВ

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев
E-mail: iipt@iipt.com.ua, iipt@mail.ru

Авторскими методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [7,9,10] получены точные аналитические решения волнового уравнения в областях с подвижными границами для общего случая [7] произвольных законов изменения скорости, величин перемещений, начального радиуса и трех видов симметрии. Решения универсальны, пригодны для обратных и прямых задач. Впервые предложены способы преодоления некорректности (многозначности) при определении функций управления волновыми процессами по заранее заданным, исходя из технологических потребностей, функциям воздействия в точке волновой зоны.

Волновое уравнение в теории волн имеет фундаментальное значение [1]. При этом учет движения границ на волновые процессы является сложнейшей проблемой теоретической и математической физики [2-5]. Некорректными считаются задачи, для которых не удовлетворяется хотя бы одно из условий: а) решение задачи существует; б) решение определяется однозначно; в) задача устойчива [6, Т.3, с.930]. Ранее точные аналитические решения обратных и прямых волновых задач получены [7,8] (условие (1)); решения устойчивы [7, стр. 18] (условие (3)); второе условие не выполнено – решения неоднозначны [9, 12 и др.]. Это причина отсутствия не только аналитических, но и численных решений обратных задач, что сделало невозможным до настоящего времени вообще решать вопросы управления волновыми процессами.

Вообще говоря, функции воздействия можно получить (обеспечить) с различных (бесконечного множества) величин начального радиуса r_0 [9], но при этом законы движения границ будут существенно различными, так же различными будут гидродинамические поля, кроме значений в одной точке r_1.

В настоящей работе делается попытка преодоления некорректности (многозначности) функций управления волновыми процессами, что имеет большое научное, прикладное и принципиальное значение в теоретической и математической физике. Без решения вопросов многозначности обратных, прямых, дважды нелинейных, с подвижными границами (ПГ) и подвижными проницаемыми границами (ППГ) волновых задач решение проблемы подвижных границ для волнового уравнения не может считаться полным и окончательно завершенным. Кроме того, вопросы управления остаются нерешенными.

Одномерные движения представляют во многих случаях значительный теоретический и практический интерес (Л.И. Седов).

Рассмотрим случай цилиндрической симметрии, который является наиболее сложным для изучения (В.К. Кедринский). Функции управления волновыми процессами будем получать методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [7, 10]. В соответствии с этими методами получим решение волнового уравнения, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям и условию

$$P-P_0\big|_{r=r_1}=-\rho\varphi_t=f\left[t-\left(r_1-r_0\right)/a\right], \qquad (1)$$

– обратная задача. Опуская выкладки, в принципе подобные и многократно приведенные, например, в [7, 9, 10][1], получим функции управления $P\left(R(t),t\right)$ и $v\left(R(t),t\right)$:

$$\left|\int_0^t P\left(r,t-\tau\right)X\left(r_1\right)d\tau=\int_0^t f\left(r,\xi-\tau\right)X\left(r\right)d\tau\right|_{r=R(t)}, \qquad (2)$$

$$\left|\rho\int_0^t v\left(r,t-\tau\right)X\left(r_1\right)d\tau=\int_0^t \frac{1}{r}f\left(r,\xi-\tau\right)X\left(r\right)\left(\tau+\frac{r}{a}\right)d\tau\right|_{r=R(t)}, \qquad (3)$$

$$\left|\frac{\rho}{2}\int_0^t\left[r^2\left(t-\tau\right)-r_0^2\right]X\left(r_1\right)d\tau=\int_0^t f^*\left(r,\xi-\tau\right)X\left(r\right)\left(\tau+\frac{r}{a}\right)d\tau\right|_{r=R(t)}, \qquad (4)$$

$$X\left(r\right)=\left(\tau^2+2\frac{r}{a}\tau\right)^{-1/2},\ X\left(r_1\right)=\left(\tau^2+2\frac{r_1}{a}\tau\right)^{-1/2},\ \xi=t-\frac{r-r_0}{a},\ f^*=\int_0^t f\left(r,\xi\right)dt,$$

здесь φ – потенциал скорости; t – время; $R(t),r_0,r,r_1$ – координаты: подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; P_0,ρ,a – давление, плотность, скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости; v – скорость.

Воспользуемся следующим физическим фактом: вид функции воздействия несет информацию о том, с какой скоростью расширялась поверхность цилиндрического поршня, по какому закону изменялось давление на ПГ, с какого начального радиуса начиналось движение. Для общего случая произвольных законов движения границ и видов функции f последнюю можно аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m. Число m характеризует количество точных значений функции и может быть сколь угодно большим [6, Т.2].

$$f=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\xi_1^m,\quad A_m=const,\quad \xi_1=t-\left(r_1-r_0\right)/a. \qquad (5)$$

Учитывая (2)-(5), функции воздействия имеют вид:

$$P\left(r_1,t\right)=-\rho\varphi_t-0,5\rho\varphi_r^{\,2}=F_1-F_2, \qquad (6)$$

где F_1 – компонента давления, вычисляемая по (2) при $r=r_1$; F_2 – нелинейный член интеграла Коши-Лагранжа, $F_2=0,5\rho v^2\left(r_1,t\right)$, учет которого в подобных задачах необходим, что подробно и неоднократно обсуждалось ранее, например, [11][2], [7, рис. 1] и т.д.; $v\left(r_1,t\right)$ по (3) при $r=r_1$. Коэффициенты A_m определяются из (6), левая часть задана.

1. РАСШИРЕНИЕ ЦИЛИНДРА БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ.

[1] а так же В.С. Крутиков // ДАН, 1999, Т.368, №6, С.755-758; В.С. Крутиков // Письма в ЖТФ, 1988, Т.14, №6.
[2] см. так же В.С. Крутиков // ДАН, 1993, Т.333, №4 (стр. 513); В.С. Крутиков // ПММ, 1991, 6, (стр. 1060).

Задана исходная кривая 1 работы [12, стр.14] – функция воздействия в точке $r_1 = 0,08\,m$; $a = 1460\,m/s$, $\rho = 102\,kgf \cdot s^2/m^4$. Построим полином, коэффициенты которого:
$A_0 = 11,74998$; $A_1 = -11,2383 \cdot 10^6$; $A_2 = 5,3499 \cdot 10^{12}$; $A_3 = -0,8216 \cdot 10^{18}$. (7)

На кривой 1 возьмем какую-либо точку, например, $t_1 = 56\,\mu s$ (соответствует времени $t = 1,274\,\mu s$ полинома после прихода волны), тогда $P(t = 1,274\,\mu s) = 4,41764768$.

Понятно, что это время t_1 выбирается таким в исследуемом промежутке времени, чтобы $v(r_1, t)$, а значит F_2 было наименьшим.

Определим скорость в точке r_1 в момент прихода волны $t^0 = (r_1 - r_0)/a$ по точным формулам (1)-(6) работы [13]. При этом скорость и α не зависят от r_0. Действительно: $(t + \alpha + r_0/a) = (r_1 - r_0)/a + \alpha + r_0/a = r_1/a + \alpha$. Тогда $\alpha = 0,00912243 \cdot 10^{-6}$ [13], $v(r_1, t) = 0,789\,m/s$; в формуле для v величина $A = 11,74998 \cdot 10^{-6}$; $0,5\rho v^2(r_1, t) = 0,003175\,kgs/cm^2$ – величина малая и будет еще меньше через $1,274\,\mu s$.

Теперь можем записать соотношение для функции воздействия с учетом (7), согласованное с внутренней структурой волнового уравнения и с учетом реальных величин запаздывания [10]; значения t выбираем, чтобы F_2 и погрешность были наименьшими:

$$P(r_1, t = 56\mu s) = 4,41764768 = 11,74998 - 11,2383 \cdot 10^6 \xi + 5,34999 \cdot 10^{12} \xi^2 - 0,8216 \cdot 10^{18} \xi^3 - (F_2 \approx 0)$$

в котором одно неизвестное r_0, решаемое известными методами: $r_0 = 0,1 \cdot 10^{-3}\,m$. Это точно соответствует значению r_0 при решении прямой задачи методом характеристик полной системы (13) [12]. Зная r_0, можем однозначно по (2), (3) определить функции управления, что и проделано, например, в [9, 12]. Подобным образом преодолена некорректность и для сферического случая симметрии, а также с учетом проницаемости подвижной границы.

Следует отметить, что искомая величина r_0 не входит в коэффициенты Лагранжа A_m (7), то есть практически не зависит от степени полинома m. Она входит только в аргумент с запаздыванием $\xi = t - (r_1 - r_0)/a$, кроме того мы всегда можем аппроксимировать значение в точке r_1 в какой-либо момент элементарной функцией (например, экспонентой или используя формулы (9)-(13) [9], где будет только одно значение r_0). Количество знаков после запятой выбирается для более точного определения r_0, что имеет большое значение при определении функций управления при $t \to 0$, например, в наносекундном диапазоне.

Таким образом впервые удовлетворены все три условия корректности [6, Т.3, стр.930]: решение задачи существует, определяется однозначно, решения устойчивы (см. стр. 1) для волнового уравнения в областях с ПГ.

2. РАСШИРЕНИЕ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ.

Частный случай расширения цилиндра конечной длины l – чрезвычайной сложности, в математической физике не рассматривался (обратная задача). Он имеет большое научное и прикладное значение. Показано подробно ранее [9], как с помощью решений одномерной задачи можно определить функции управления расширяющегося цилиндра конечной длины (многомерная задача) в наиболее важном периоде времени ввода энергии в плазменный канал электрического разряда или лазерного импульса в жидкости. Это важный период времени, когда формируются наиболее интересные для приложений, значения функций воздействия. Однако полученные ранее, например, в [9] функции управления многозначны, т.е. пункт второй корректности [6, Т.3] не определен, о чем неоднократно упоминалось ранее.

2.1. Преодоление первой некорректности, обусловленной множеством величин начального радиуса при различных законах изменения скорости ПГ, обеспечивающих однозначную функцию воздействия в точке r_1. Пусть необходимо обеспечить функцию воздействия кривая 1 рис. 1 работы [9] в точке $r_1 = 200\,mm$, $a = 1460\,m/s$, $\rho = 102\,kgf \cdot s^2/m^4$. Следуя подробному описанию в п.1. воспользуемся нисходящей ветвью кривой 1 рис. для периода $t \geq \alpha_2$, $\alpha_2 = t^0 + 4 \cdot 10^{-6}\,s$; $P_{\max}(r_1, t) = 163\,kgf/cm^2$; $\alpha = 0,00365 \cdot 10^{-6}$ по [12, стр. 14], которую аппроксимируем полиномом, где

$$A_0 = 163;\ A_1 = 5,60(6) \cdot 10^6;\ A_2 = 0,201(9) \cdot 10^{12};\ A_3 = -0,0161(3) \cdot 10^{18}, \qquad (8)$$

Соотношение, согласованное со структурой волнового уравнения [10] и с учетом реальных запаздываний будет иметь вид, время t выбрано по соображениям п.1:

$$P\left(r_1, t = 150,849315 \cdot 10^{-6}\right) = 110,(9) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 - \left(F_2 \approx 0\right); \qquad (9)$$

где $\xi = \left[t - \left(r_1 - r_0\right)/a\right] - 4 \cdot 10^{-6} = \left(9,863014 \cdot 10^{-6} + r_0/1,46 \cdot 10^3\right)$; A_m из (8), оценка величины $F_2 = 0,61565\,kgf/cm^2$, которая будет еще меньше через $10\mu s$, произведена как в п.1 по (9)-(12) [9] при $R(t) = r_1$. Решение (9) производится известными методами: $r_0 = 0,2 \cdot 10^{-3}m$, что точно соответствует значению r_0 при решении прямой задачи методом Годунова системы (14), (15) работы [9].

2.2. Преодоление второй некорректности, связанной со множеством величин l конечных длин расширяющегося цилиндра, возможно сравнением $P\left(R(t), t\right)$ или $P(r_1, t)$: а) при расширении заданного конечного l и б) бесконечной длины цилиндра, определенного по вычисленным ранее r_0 (см. п.п. 1, 2, 2.1) и скорости $v\left(R(t), t\right)$ (подробно описано ранее, например, в [9]). Физически понятно, функции воздействия, а также управления, будут идентичными в определенный промежуток времени Δt до тех пор, пока не начнет сказываться влияние частей расширяющегося бесконечного цилиндра, больших l.

Зная Δt, с учетом соотношений

$$\Delta t = c/a - t^0;\ \ c = \left[\left(0,5l\right)^2 + \left(r_1 - r_0\right)^2\right]^{1/2}, \qquad (10)$$

длина l однозначно определится из (10). Оценим влияние погрешности определения Δt на вычисление l; значения величин из п. 2.1: $\Delta t = 16 \mu s$; из (10) получаем $l = 198{,}8\, mm$; $\Delta t = 20 \mu s$ (20%); из (10) получаем $l = 223{,}8\, mm$ (~10%);

таким образом видим, погрешность определения Δt приводит к меньшей в два раза погрешности определения l. Значение $l = 200\, mm$ точно соответствует расчету методом Годунова С.К. прямой задачи расширения цилиндра конечной длины [14] при E = 2570J системы (14), (15) [9]. Значения $\Delta t = 16;\, 20\, \mu s$ также хорошо отражены на рисунке $\left(P\left(R\left(t\right),t\right)\right)$ наилучшим совпадением функций управления конечного и бесконечного цилиндров именно в этом диапазоне времени Δt.

Обозначим еще одну возможность. Определив $P\left(R\left(t\right),t\right)$, $v\left(R\left(t\right),t\right)$ можно, используя уравнение баланса энергии (15) [9], в котором объем $V_к = \pi R^2\left(t\right)\cdot l$ с учетом численного решения прямой задачи (14), (15) [9], [14], которое уже освоено, подобрать такое l, чтобы обеспечить заданную функцию воздействия кривая 1 рис. 1 [9] с необходимой для практических целей точностью.

Определив однозначно функции управления, становятся известными однозначно законы ввода мощности в расширяющуюся плазменную полость электрического разряда и лазерного импульса в жидкости (Лямшев Л.М. УФН. 1987), а значит определены, соответственно однозначно, электродинамические характеристики электрического разряда или интенсивность света лазерного импульса. Преодолеть неоднозначность другими способами нельзя, это возможно только с помощью точных аналитических решений дважды нелинейных волновых задач с ПГ.

Границы применимости волнового уравнения и его точных аналитических решений определены впервые и нетрадиционно по скорости ПГ и ППГ $v\left(R\left(t\right),t\right) = 200\, m/s$ в работе [10, стр. 115-116]; в некоторых случаях скорость может достигать $350\, m/s$ [8] и более.

В заключение необходимо сказать следующее. Удивительны необычайное число приложений волнового уравнения в той или иной степени описывающего все богатство явлений природы, как и непостижимая эффективность математики в естественных науках [1, 15], многократно возрастающая теперь еще и наличием однозначных аналитических соотношений функций управления волновыми процессами в областях с ПГ и ППГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.И. Теория волн. М.: Наука. 1979. 383с.
2. Гринберг Г.А. // ПММ. 1967. Т.31. №2. С.193-203.
3. Вопросы математической физики / Под ред. В.М. Тучкевича. Л.: Наука. 1976. 296с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. Т.6. М.: Наука. 1986. 736с.
5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука. 1968.

6. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. М.: Сов. энциклопедия. 1982. Т.3. (стр. 930-938); 1979. Т.2. 1103с.
7. Крутиков В.С. // Доклады РАН. 1999. Т.364. №1. С.17-20 (Krutikov V.S. // Doklady Mathematics. vol. 59. no.1. 1999. pp. 10-13).
8. Крутиков В.С. // Акуст. журн. 1996. Т.42. №4. С.534-340 (Krutikov V.S. // Acoustical Physics. vol. 42. no. 4. 1996. pp. 471-477).
9. Крутиков В.С. // Доклады РАН. 2006. Т.406. №1. С.1-5 (Krutikov V.S. // Doklady Physics. vol. 51. no.1. 2006. pp. 1-5).
10. Крутиков В.С. Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка. 1985. 125с.
11. Слепян Л.И. // Доклады РАН. 1985. Т.282. №4. С.809-813.
12. Крутиков В.С. // Письма в ЖТФ. 2005. Т.31. Вып.1. С.9-16.
13. Крутиков В.С. // Письма в ЖТФ. 2003. Т.29. Вып.24. С.7-14.
14. Барбашова Г.А., Богаченко О.А., Иванов А.В. // Электроразрядные процессы: Теория, эксперимент, практика. Киев: Наук. думка. 1984. С.53-58
15. Вигнер Е. // УФН. 1968. Т.94. Вып.3 С.535-546.