СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК И ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С УПРУГИМ ДНОМ

Ю.Н. КОНОНОВ, доктор физ.-мат. наук, проф.,
Донецкий национальный университет, г. Донецк, Украина,
e-mail: kononov@univ.donetsk.ua

Е.А. ТАТАРЕНКО, асс.,
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
г. Макеевка, Украина, e-mail: tata.donetsk@mail.ru

Построено аналитическое решение плоской задачи гидроупругости, описывающей взаимосвязанные свободные колебания упругих пластинок, расположенных на свободной и внутренней поверхностях двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с плоским упругим дном в виде пластинки. Выведено и исследовано частотное уравнение. Рассмотрены случаи отсутствия пластинок, случаи, когда пластинка находится только на свободной или внутренней поверхности двухслойной жидкости. Получено условие устойчивости связанных колебаний двухслойной жидкости, пластинок и упругого дна.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследованы собственные колебания двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с жестким дном и упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях. В настоящем сообщении обобщены результаты этой работы на случай плоского упругого дна и упругих пластинок. Задача о влиянии упругости дна на собственные частоты колебаний однородной тяжелой идеальной жидкости, находящейся в прямом круговом цилиндре, была рассмотрена в статье [2]. С позиций функционального анализа обобщение этой задачи на случай однородной и многослойной идеальной тяжелой и капиллярной жидкости было дано в работах [3-5]. В диссертации [6] развита методика исследования движения двухслойной жидкости внутри сосуда в случае наличия упругого дна и упругой крышки. Дан анализ влияния упругого дна на устойчивость движения вязкой двухслойной жидкости относительно замкнутого сосуда.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямоугольный канал с плоским упругим дном ширины b, заполненный двухслойной идеальной и несжимаемой жидкостью с плотностями ρ_n до глубин h_n ($n = 1, 2$). На свободной поверхности верхней жидкости ($n = 1$) и на поверхности раздела двухслойной жидкости равномерно натянуты гибкие пластинки с изгибной жесткостью D_i растягивающими усилиями в срединной поверхности T_i, массовой плотностью материала ρ_{0i} и толщиной δ_{0i} ($i = \overline{1,3}$). Края пластинок жестко закреплены на стенках канала. Дно представляется в виде плоской упругой пластинки, жестко защемленной по краю (рис.1). Колебания жидкостей и пластинок будем рассматривать в плоской постановке.

.

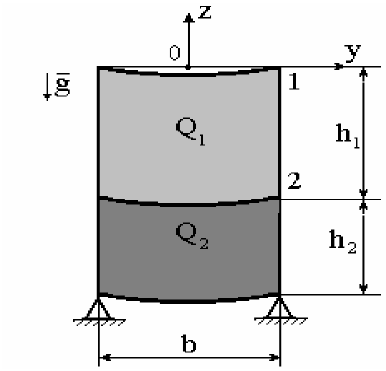

Рис.1

Систему координат $Oxyz$, расположим так, чтобы ось Ox была направлена вдоль канала, а ось Oz совпадала с осью симметрии его поперечного сечения и направлена против ускорения силы тяжести.

Плоскость Oxy совпадает с плоскостью раздела жидкостей в невозмущенном состоянии. Задачу будем решать в рамках линейной теории, а движения жидкостей считать потенциальными.

Колебания пластинок описываются следующими уравнениями:

$$\rho_{0i}\delta_{0i}\frac{\partial^2 \mathrm{w}_i^*}{\partial t^2}+D_i\frac{\partial^4 \mathrm{w}_i^*}{\partial y^4}-T_i\frac{\partial^2 \mathrm{w}_i^*}{\partial y^2}=\mathrm{P}_i-\mathrm{P}_{i-1}, \tag{1}$$

при следующих граничных условиях

$$\mathrm{w}_i^*\Big|_{y=\pm\frac{b}{2}}=\frac{\partial \mathrm{w}_i^*}{\partial y}\Bigg|_{y=\pm\frac{b}{2}}=0. \tag{2}$$

Поперечная нагрузка $P_n(t,y)$, которую испытывают пластинки со стороны жидкости, может быть определена с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа-Коши

$$\mathrm{P}_n=-\rho_n\left(\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial t^2}\Bigg|_{z=z_n}+gz+\chi_n\right), \tag{3}$$

Здесь $z=w_n^*+z_n$ для упругих пластинок и $z=w_3^*+z_3$ для упругого дна; $\Phi_n(t,y,z)$ - потенциал смещений n-ой жидкости; $w_i^*(y,t)$ - нормальный прогиб $\underline{i}$-ой пластинки; g - ускорение силы тяжести; $\chi_n(t)$ - произвольная функция времени; $z_1=h_1$, $z_2=0$, $z_3=-h_2$; $P_0=P_3=p_a$.

Потенциал смещений двухслойной жидкости $\Phi_n(t,x,y)$ определяется из решения краевой задачи:

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial z^2}=0,\ (y,z)\in Q_n,\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial y}\Bigg|_{y=\pm\frac{b}{2}}=0,\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\Bigg|_{z=h_1}=\mathrm{w}_1^*,$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\Bigg|_{z=-h_2}=\mathrm{w}_3^*,\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\Bigg|_{z=0}=\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\Bigg|_{z=0}=\mathrm{w}_2^*,\ \int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{w}_i^*(t,y)dy=i_0^*, \tag{4}$$

где Q_n - область поперечного сечения канала, занятая n-ой жидкостью.

Представим прогиб пластинок в виде суммы статического и динамического прогибов

$$\mathrm{w}_i^*=\mathrm{w}_i^0+\mathrm{w}_i. \tag{5}$$

Для исследования собственных колебаний механической системы запишем неизвестные динамические функции в виде

$$\Phi_i(t,x,y)=\varphi_i(x,y)\mathrm{e}^{i\omega t},\quad \mathrm{w_i}(y,t)=\mathrm{W_i}(y)\mathrm{e}^{i\omega t},\quad \chi_n(t)=gc_n\,\mathrm{e}^{i\omega t}. \qquad (6)$$

Подставим (5)-(6) в соотношения (1)-(4) и перейдем к безразмерным величинам в динамической задаче, выбрав в качестве характерного линейного размера ширину канала b. В результате получим граничную задачу на собственные значения

$$W_n^{IV}-K_nW_n''-\gamma_n^2W_n=\lambda^2 d_n\left(\phi_n(y,z_n)-\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\phi_{n-1}(y,z_n)\right)-d_n\left(c_n-\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}c_{n-1}\right),$$

$$W_3^{IV}-K_3W_3''-\gamma_3^2W_3=d_3\left(c_2-\lambda^2\phi_2(y,-h_2)\right),$$

$$W_i\left(\pm\frac{1}{2}\right)=W_i'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0,\quad \int_{-1/2}^{1/2}W_i(y)dy=i_0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi_n}{\partial z^2}=0,\quad (y,z)\in Q_n,$$

$$\left.\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\right|_{y=\pm1/2}=0,\ \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2}=W_3,\ \left.\frac{\partial\phi_n}{\partial z}\right|_{z=z_n}=W_n,\ \left.\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right|_{z=0},$$

где приняты следующие обозначения:

$$\lambda^2=\frac{\omega^2 b}{g},\quad a_i=\frac{g\rho_{0i}\delta_{0i}b^3}{D_n},\quad d_n=\frac{\rho_n g b^4}{D_n},\quad d_3=\frac{\rho_2 g b^4}{D_3},\ K_i=\frac{T_i b^2}{D_i},$$

$$\gamma_n^2=\lambda^2 a_n-d_n\left(1-\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right),\ \gamma_3^2=\lambda^2 a_3+d_3,$$

c_n - произвольные постоянные.

Будем предполагать, что выполняется неравенство

$$\lambda^2>\frac{d_n}{a_n}\left(1-\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right). \qquad (8)$$

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

После применения метода разделения переменных составляющие потенциала смещений жидкости ϕ_n можно представить в виде

$$\phi_n=i_0 z+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i_{nk}\,\mathrm{ch}\,\pi k(z-z_{n+1})-i_{n+1k}\,\mathrm{ch}\,\pi k(z-z_n)}{\pi k\,\mathrm{sh}\,\pi k h_n}Y_k. \qquad (9)$$

Здесь $Y_k=\cos\pi k\left(y+\frac{1}{2}\right)$, $i_{nk}=\int_{-1/2}^{1/2}W_nY_k dy$.

С учетом (9) исходную задачу (7) сведем к краевой задаче на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения относительно составляющей прогиба пластинок

$$W_n^{IV}-K_nW_n''-\gamma_n^2W_n=d_n\left(\lambda^2 i_0 z_n-c_n+\rho_{12}c_{n-1}\right)+\left.\sum_{k=1}^{\infty}B_{nk}Y_k\right], \qquad (10)$$

где $$B_{nk}=\frac{2\lambda^2 d_n}{\pi k}\left(-i_{n-1k}b_{n-1k}\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}+i_{nk}u_{nk}-i_{n+1k}b_{nk}\right),$$

$$B_{3k} = \frac{2\lambda^2 d_3}{\pi k}\left(u_{3k} i_{3k} - i_{2k} b_{2k}\right),\ b_{nk} = \frac{1}{\pi k h_n},\ u_{nk}{=}\pi k h_n + \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\pi k h_{n-1},\quad u_{3k}{=}\pi k h_2 .$$

Представив частные решения этих уравнений в форме, отвечающей их правым частям

$$W_i^* = W_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{ik} Y_k ,$$

запишем общее решение задачи в виде

$$W_i = A_i p_{2i} y + B_i p_{2i} y + C_i \cos p_{1i} y + D_i \sin p_{1i} y + W_i^*(y) . \tag{11}$$

Здесь $p_{1i,2i} = \sqrt{0.5\left(\sqrt{K_i^2 + 4\gamma_i^2} \mp K_i\right)}$, а A_i, B_i, C_i, D_i - произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (7).

Подставляя выражения (11) в уравнение (7), имеем

$$W_{ik} = B_{ik}/S_{ik} ,\ \ S_{ik} = (\pi k)^4 + K_i \pi^2 k^2 - \gamma_i^2 ,$$

$$-\gamma_1^2 W_{01} = d_1\left(\lambda^2 i_0 h_1 - c_1\right),\ -\gamma_2^2 W_{02} = d_2\left(\rho_{12} c_1 - c_2\right),\ -\gamma_3^2 W_{03} = d_3\left(\lambda^2 i_0 h_2 + c_2\right). \tag{12}$$

Выберем постоянную W_{0i} из условия несжимаемости жидкостей, и с учетом (12) представим функции $W_i(y)$ следующим образом:

$$W_i(y) == A_i p_{2i} y + B_i p_{2i} y + C_i \cos p_{1i} y + D_i \sin p_{1i} y + W_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{ii} b_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{2} A_{ji} b_j \right) Y_k ,$$

где

$$A_{ii}{=}2\left(\delta_{ii}{-}1\right),\ A_{ji}{=}2(-1)^{i+j}\,\delta_{ji} ,$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1{-}M_{1k}u_{1k} & M_{1k}b_{1k} & 0 \\ M_{2k}b_{1k}\rho_{12} & 1{-}M_{2k}u_{2k} & M_{2k}b_{2k} \\ 0 & M_{3k}b_{2k} & 1{-}M_{3k}u_{3k} \end{vmatrix},$$

$$M_{ik} {=} \frac{\lambda^2 d_i}{\pi k\left(\pi^4 k^4 + K_i \pi^2 k^2 - \gamma_i^2\right)},\ b_i{=}A_i I_{1i}{+}B_i I_{2i} + C_i I_{3i}{+}D_i I_{4i} , \tag{13}$$

$$I_{1i}{=}\int_{-1/2}^{1/2} \cos\left(p_1 y\right) Y_k\, dy\ ,\ I_{2i}{=}\int_{-1/2}^{1/2} \sin\left(p_1 y\right) Y_k\, dy\ ,\ I_{3i}{=}\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{ch}\left(p_2 y\right) Y_k\, dy\ ,\ I_{4i}{=}\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{sh}\left(p_2 y\right) Y_k\, dy\ .$$

δ_{ji} -миноры соответствующих элементов определителя Δ_k. Для удобства записи здесь и далее третий индекс k будем опускать.

Неизвестные постоянные определим из условий жесткого закрепления пластинок. При этом получим линейную алгебраическую систему, которая с учетом значений определенных интегралов (13), расщепляется на две независимые системы относительно A_i и относительно B_i.

Условия существования нетривиальных решений этих систем приводят к двум характеристическим уравнениям относительно параметра λ.

Если значения λ совпадают с корнями уравнения

$$\left| \left\| a_{ij} \right\|_{i,\, j=\overline{1,3}} \right| = 0, \tag{14}$$

где

$$a_{ij} = f_i + (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{ji} / S_{kj} \,,\ S_{k3} = \alpha_k^4 + K_3 \alpha_k^2 - \gamma_3^2 \,,\ \alpha_k = 2k\pi \,,\ \rho_{12} = \rho_1 / \rho_2 \,,$$

$$f_1 = \frac{\rho_{12}}{2d_1 Q} \,,\ f_2 = \frac{1}{2d_2 Q} \,,\ f_3 = \frac{1}{2d_3 Q} \,,\ Q = \lambda^2 \left(\rho_{12} \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \frac{a_3}{d_3} + \rho_{12} h_1 + h_2 \right), \qquad (15)$$

то им соответствуют симметричные формы связанных колебаний мембран, жидкостей и дна, а частоты для несимметричных колебаний определяются из (14), (15)при

$$f_i = 0 \,,\ \beta_k = (2k-1)\pi. \qquad (16)$$

При выводе уравнения (14) гиперболические функции были разложены на простейшие дроби так, как это сделано в [7]. Хотя при этом корни этого уравнения находятся с большей погрешностью, однако это удобно для численных исследований и качественного анализа.

Если неравенство (8) не выполняется, то по аналогии с работой [7] переходим к новым переменным.

Для того, чтобы получить частотное уравнение собственных колебаний двухслойной жидкости при отсутствии n-ой пластинки, следует в определителе (14) вычеркнуть n-й столбец и n-ю строку, поскольку исключаются из рассмотрения соответствующие граничные условия. Кроме этого в определителе Δ_k следует положить $T_n = 0$, $D_n = 0$, $\rho_{0n}\delta_{0n} = 0$.

Если в рассматриваемой механической системе отсутствует верхняя пластинка, то частотное уравнение будет иметь вид

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = 0.$$

Здесь $$Q = \lambda^2 \left(\frac{a_2}{d_2} + \frac{a_3}{d_3} + h_2 \right), \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} 1 - \lambda^2 u_{1k} / \alpha_k & \lambda^2 b_{1k} / \alpha_k & 0 \\ M_{2k} b_{1k} \rho_{12} & 1 - M_{2k} u_{2k} & M_{2k} b_{2k} \\ 0 & M_{3k} b_{2k} & 1 - M_{3k} u_{3k} \end{vmatrix},$$

а если отсутствует и верхняя жидкость, то дополнительно полагаем $\rho_1 = 0$.

Уравнение свободных колебаний однослойной жидкости со свободной поверхностью и упругим дном запишется так

$$a_{33} = 0 \,,\ Q = \lambda^2 \left(\frac{a_3}{d_3} + h_2 \right),\ \Delta_k = \begin{vmatrix} 1 - \lambda^2 / \alpha_k \, u_{1k} & \lambda^2 / \alpha_k \, b_{1k} & 0 \\ 0 & 1 - \lambda^2 u_{2k} / \alpha_k & \lambda^2 b_{2k} / \alpha_k \\ 0 & M_{3k} b_{2k} & 1 - M_{3k} u_{3k} \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Остальные переменные вычисляются по формулам (14)-(15). Для случая несимметричных колебаний это частотное уравнение будет следующим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda^2 u_{3k} / \beta_k}{\Delta_k (\beta_k^4 + K_3 \beta_k^2 - \gamma_3^2)} = 0 \,,\ \Delta_k = \begin{vmatrix} 1 - \lambda^2 u_{3k} / \beta_k & \lambda^2 / \beta_k \, b_{2k} \\ M_{3k} b_{2k} & 1 - M_{3k} u_{3k} \end{vmatrix} \qquad (18)$$

Заметим, что первое слагаемое ряда в уравнении (18) обращается в ноль при $\lambda^2 = \beta_1 \,\mathrm{th}\, \beta_1 h_2$, что соответствует первой собственной частоте колебаний свободной поверхности однородной жидкости.

В случае, если одна из мембран или упругое днище становятся абсолютно жесткими ($i_0 = 0$), то в симметричном и несимметричном случаях величины $f_i = 0$.

СТАТИЧЕСКИЙ ПРОГИБ

Статический прогиб находится из решения исходной краевой задачи и имеет вид

$$w_i^0 = \tilde{c}_i \left(1 - \frac{r_{2i} \operatorname{sh} r_{2i}/2 \cos r_{1i} y + r_{1i} \sin r_{1i}/2 \operatorname{ch} r_{1i} y}{r_{2i} \operatorname{sh} r_{2i}/2 \cos r_{1i}/2 + r_{1i} \sin r_{1i}/2 \operatorname{ch} r_{2i}/2} \right),$$

где

$$\tilde{c}_1 = -h_1 - C_1 - \frac{p_a}{\rho_1 g} \quad \tilde{c}_2 = -\frac{C_2 - \rho_{12} C_1}{1 - \rho_{12}}, \ \tilde{c}_3 = -h_2 + C_2 - \frac{p_a}{\rho_2 g}.$$

$$r_{1n,2n} = \sqrt{0.5\left(K_n \mp \sqrt{K_n^2 - 4d_n}\right)}, \ \ r_{13,23} = \sqrt{0.5\left(\sqrt{K_3^2 + 4d_3} \mp K_3\right)}.$$

C_n находим из условия несжимаемости жидкости.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Необходимым условием устойчивости совместных колебаний упругих пластинок и двухслойной жидкости является положительность всех корней частотного уравнения (14). Оставляя даже одно слагаемое в рядах этого уравнения в случае симметричных колебаний, получаем многочлен восьмой степени относительно λ^2, что затрудняет проведение дальнейших исследований. Из условия положительной определенности потенциальной энергии [8] следуют условия устойчивости положения равновесия

$$\rho_1 - \rho_2 < \beta_1^4 \frac{D_2}{gb^4} + \beta_1^2 \frac{T_2}{gb^2}, \quad \rho_2 < \beta_1^4 \frac{D_3}{gb^4} + \beta_1^2 \frac{T_3}{gb^2}. \tag{21}$$

Условия (21) не зависят от параметров верхней мембраны, глубин заполнения и массовых характеристик мембран и пластинки. Эти условия не изменяются, если упругая мембрана отсутствует на свободной поверхности или является абсолютно жесткой. В случае абсолютно жесткого дна ($T_3 = \infty$) из двух неравенств (21) остается только первое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А.* Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на "свободной" и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. - 2003. – т. 6. № 4. - с.44 - 52.
2. *Петренко М.П.* О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами // Прикладная механика. – 1969. – т. 5 № 6. - с. 44-50.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. - М.: Наука, 1989. – 416 с.
4. *Нго Зуй Кан* О движении несмешивающихся жидкостей в сосуде с плоским упругим днищем // Известия АН СССР. МТТ. - 1979. - № 5. - с. 48-54.
5. *Нго Зуй Кан* О движении идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, заполняющей сосуд с плоским упругим днищем // Известия АН СССР. МТТ. - 1980. - № 3. - с.143-154.

6. *Имедашвили В.Г.* Колебания жидкости в сосудах: Автореф. Дис...канд. физ.-мат. наук /Ростовский государственный университет (РГУ) 2000.-15с.
7. *Троценко В.А.* Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикладная механика. - 1995. - т.31 № 8. - с.74-80
8. *Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А.* О поперечных колебаниях прямоугольного сосуда с упругим днищем, содержащего двухслойную жидкость, разделенную упругой пластинкой // Материалы X Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». - 2003. – с.304-305.