# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОБОЛОЧКЕ В СИСТЕМЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ОСЕВОМ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

**А.П.КОВАЛЕНКО**
*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины*
*e-mail: dynamic@inmech.kiev.ua*

В работе продолжена разработка аналитико-численного подхода к исследованию гидроупругих систем цилиндрическая оболочка – жидкость. Рассматривается полубесконечная цилиндрическая оболочка по теории оболочек типа Тимошенко. Жидкость рассматривается в акустическом приближении. На торце оболочки прикладывается импульсное нагружение. В пространстве изображений получено аналитическое решение во втором приближении для величин, характеризующих движение оболочки. Проведены численные расчеты для различных значений коэффициента взаимосвязи, учитывающего взаимное влияние жидкости и оболочки при импульсном нагружении. Анализ результатов показывает несущественное влияние жидкости на продольное напряжение в оболочке и значительное влияние на угол поворота сечения по теории оболочеки типа Тимошенко.

## 1. ВСТУПЛЕНИЕ

Всесторонний учет взаимного влияния элементов гидроупругих систем (в частности жидкости и упругой оболочки) при различного рода нагрузках вызван потребностями современного развития авиационной и космической техники для предотвращения возможных нештатных и критических ситуаций. Особенно актуально изучение взаимного влияния элементов гидроупругих систем для динамических и нестационарных (импульсных и ударных) нагрузок на данную механическую систему. Необходимость таких исследований вызвана также проблемами снижения материалоемкости гидроупругих систем как элементов различных технических конструкций авиа- и космической техники, трубопроводов, емкостей для перевозки жидкостей и т.п. Актуальность всестороннего анализа взаимодействия элементов в таких гидроупругих системах вызвана также и практическими потребностями, а именно при расчете на прочность и улучшении эксплуатационных характеристик трубопроводов, топливных систем летальных аппаратов, емкостей для транспортировки жидких и газообразных продуктов и т.п

Активные исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах расматриваются разнообразные оболочечные гидроупругие системы под действием волновых и всевозможных динамических нагрузок [1-6,10,15,16]. Однако следует отметить, что не полностью исследовано взаимное влияние элементов гидроупругой системы при торцевых динамических и импульсных нагрузках и полностью раскрыт механизм взаимного влияния элементов гидроупругих систем при таких нагрузках.

В работе ставится цель продолжить разработку предложенного автором подхода к анализу системы цилиндричкская оболочка – жидкость [2-5] при осевых динамических и импульсных нагрузках и исследовать влияние жидкости на продольное напряжение в оболочке и на угол поворота сечения (по теории оболочек типа Тимошенко) при осевой (торцевой) импульсной нагрузке.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается гидроупругая система полубесконечная цилиндрическая оболочка – жидкость при осевом импульсном нагружении. Уравнение оболочки описывается уравнениями типа Тимошенко [14], позволяющими рассматривать динамические процессы в оболочке. Жидкость рассматривается в акустическом приближении [11], что также позволяет исследовать волновые процессы в жидкости. На торце оболочки $x=0$ прикладывается импульсная нагрузка по заданному закону $f(t)\cdot\eta(t)$, где $f(t)$ – закон задания импульсной нагрузки нагрузки, $\eta(t)$ – функция Хэвисайда. Задача исследуется в безразмерных величинах. За характерную длину $L$ выбрано радиус оболочки, т.е. $L=R$, а за характерное время $T$ выбрана величина $T=R\sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_1}{E}}$, где $\nu, E, \rho_1$ – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала оболочки соответственно. При таком выборе характерных величин безразмерная продольная скорость возмущений в оболочке будет самой высокой и равной $C_p=1$.

В результате математическую модель исследуемой задачи можно сформулировать следующим образом. Уравнения движения имеют вид

$$L_1(U,W,\Psi)-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0;\ L_2(U,W,\Psi)-\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = K_s\frac{\partial\varphi}{\partial t};$$
$$L_3(U,W,\Psi)-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0;\ \Delta\varphi-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Начальные условия при этом будут

$$t=0:\ U=W=\Psi=\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \quad (2)$$

Граничные условия будут следующего вида

$$x=0:\ \frac{\partial W}{\partial x}=\Psi=0,\ \frac{\partial U}{\partial t}=f(t)\cdot\eta(t),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial t}; \quad (3)$$

$$x=\infty:\ \mathrm{U}=\mathrm{W}=\Psi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0; \quad (4)$$

$$r=1:\ \frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial W}{\partial t}. \quad (5)$$

Здесь $x, r$ – безразмерные продольная и радиальная координаты соответственно, $t$ – время, $U, W, \Psi$ – продольное, поперечное перемещение и угол поворота сечения по теории оболочек типа Тимошенко соответственно, $\varphi$ – потенциал скоростей жидкости, $L_1(U,W,\Psi), L_2(U,W,\Psi), L_3(U,W,\Psi)$ – диференциальные операторы по теории оболочек типа Тимошенко [14], $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ – оператор Лапласа, $b=C_v=\sqrt{k^2(1-\nu)/2}$ – скорость распространения поперечных возмущений по стенке оболочки, $k$ –

коэффициент сдвига по теории оболочек типа Тимошенко, $a$ – безразмерная скорость звука в жидкости. Коэффициент $K_s = \dfrac{2R\rho_0}{h\rho_1 k^2(1-\nu)}$ ($\rho_0, h$ – плотность жидкости в состоянии покоя и толщина стенки оболочки соответственно) – введенный автором [2,3,5,15] коэффициент взаимосвязи элементов гидроупругой системы оболочка – жидкость.

## 3. РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Решение поставленной задачи (1)–(5) находится по разработанному автором [2-5,15] аналитико-численному подходу, который заключается в применении интегрального преобразования Лапласа-Карсона [8], метода простых итераций, метода Бубнова-Галеркина [9] и численного обращения преобразования Лапласа-Карсона с использованием смещенных полиномов Лежандра [7], модифицированного автором [4]. В результате в пространстве изображений по Лапласу-Карсону получено начальное, первое и второе приближение для $U, W, \Psi, \varphi$ – продольного, поперечного перемещения оболочки, тангенса угла поворота сечения по теории оболочек типа Тимошенко и потенциала скоростей жидкости,соответственно, Структура второго приближения для искомых функций $U, W, \Psi, \varphi$ в пространстве изображений имеет вид

$$W_2^* = \left(N_9 + N_{10}x\right)\cdot e^{-px} + \left(N_{13} + N_{14}x\right)\cdot e^{-\beta x} + \left(C_7 + N_{11}x\right)\cdot e^{-d_1 x} + N_{12}\cdot e^{-d_2 x} + \sum_{j=1}^{N} K_j e^{-\lambda_j x} \quad (6)$$

$$U_2^* = \left(C_9 + N_{17}x + N_{18}x^2\right)\cdot e^{-px} + \left(N_{20} + N_{21}x\right)\cdot e^{-\beta x} + \left(N_{15} + N_{16}x\right)\cdot e^{-d_1 x} + N_{19}\cdot e^{-d_2 x} + \sum_{j=1}^{N} L_j e^{-\lambda_j x} \quad (7)$$

$$\Psi_2^* = \left(N_{21} + N_{25}x\right)\cdot e^{-px} + \left(N_{27} + N_{28}x\right)\cdot e^{-\beta x} + \left(N_{22} + N_{23}x\right)\cdot e^{-d_1 x} + \left(C_{11} + N_{26}x\right)\cdot e^{-d_2 x} + \sum_{j=1}^{N} M_j e^{-\lambda_j x} \quad (8)$$

Продольное напряжение находим по формуле [12] $N_x^* = \dfrac{hE}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial U^*}{\partial x} + \nu W^*\right)$

Здесь звездочкой помечены функции в пространстве изображений, $p$ – параметр преобразования Лапласа-Карсона, $N$ - количество удерживаемых членов по методу Бубнова-Галеркина, $d_1^2 = \dfrac{2(p^2+1)}{k^2(1-\nu)} + K_s a p$, $d_2^2 = p^2 + \beta_{23}$, $\beta_{23} = \dfrac{6k^2R^2(1-\nu)}{h^2}$, $\beta = \dfrac{p}{a}$, $\lambda_j^2 = \alpha_j^2 + \beta^2$, $\alpha_j$ – корни уравнения $J_1(z) = 0$ ($J_1(z)$ – функция Бесселя первого порядка [13]). Коэффициенты в вышеприведенных выражениях находятся по следующим формулам:

$$\beta_{31} = \frac{2\nu}{k^2(1-\nu)};\ N_1 = -\frac{\beta_{31} f^*(p)}{p^2 - d_1^2};\ N_2 = -\frac{K_s a f^*(p)}{\beta^2 - d_1^2};\ C_1 = -\frac{pN_1 + \beta N_2}{d_1};$$

$$N_3 = \frac{\nu d_1 C_1}{d_1^2 - p^2};\ N_4 = \frac{-\nu N_1}{2};\ N_5 = \frac{\nu\beta N_2}{\beta^2 - p^2};\ C_3 = \frac{f^*(p)}{p} - N_3 - N_5;\ N_6 = -\frac{\beta_{23} d_1 C_1}{d_1^2 - d_2^2};$$

$$N_7 = -\frac{\beta_{23} p N_1}{p^2 - d_2^2};\ N_8 = -\frac{\beta_{23}\beta N_2}{\beta^2 - d_2^2};\ C_3 = -N_6 - N_7 - N_8;$$

$$Y_{10} = (D_{10} + xQ_{30})e^{-\beta x} + Q_{10}e^{-d_1 x} + Q_{20}e^{-px};\ Y_{1j} = D_{1j}e^{-\lambda_j x} + Q_{1j}e^{-d_1 x} + Q_{2j}e^{-px} + Q_{3j}e^{-\beta}\ \ (j = \overline{1,N});$$

$$Q_{1j} = \frac{M_{1j}}{d_1^2 - \lambda_j^2},\ Q_{2j} = \frac{M_{2j}}{p^2 - \lambda_j^2}\ \ (j = \overline{0,N});\ Q_{3j} = \frac{M_{3j}}{\beta^2 - \lambda_j^2}\ \ (j = \overline{1,N});\ Q_{30} = -\frac{M_{30}}{2\beta};$$

$$D_{1j} = \frac{1}{\lambda}\left(-d_1 Q_{1j} - pQ_{2j} - \beta Q_{3j}\right)\ \ (j = \overline{1,N});\ D_{10} = \frac{1}{\beta}\left(-d_1 Q_{10} - pQ_{20} + Q_{30}\right);$$

$$M_{1j} = -C_1\left(pB_{2j} + ad_1^2 B_{2j}\right);\qquad M_{2j} = -N_1\left(pB_{1j} + ap^2 B_{2j}\right);\qquad M_{3j} = -N_2\left(pB_{1j} + a\beta^2 B_{2j}\right);$$

$$(j = \overline{0,N});\ S_i = Q_{10} + \sum_{j=1}^{N} Q_{ij} J_0(\alpha_j)\ \ (i = \overline{1,2});\ S_3 = D_{10} + \sum_{j=1}^{N} Q_{3j} J_0(\alpha_j);\ S_4 = Q_{30};$$

$$N_{10} = -\frac{\beta_{31} p N_4}{p^2 - d_1^2};\ N_9 = \frac{1}{p^2 - d_1^2}\left(\beta_{31} N_4 - \beta_{31} p C_3 - \beta_{32} p N_7 + K_s p S_2 + 2pN_{10}\right);$$

$$N_{14} = \frac{K_s p S_4}{\beta^2 - d_1^2};\ N_{13} = \frac{1}{\beta^2 - d_1^2}\left(-\beta_{31}\beta N_5 - \beta_{32}\beta N_8 - K_s p S_3 + 2\beta N_{14}\right);$$

$$K_j = \frac{K_s p D_{1j} J_0(\alpha_j)}{\lambda_j^2 - d_1^2}\ \ (j = \overline{1,N});\ C_7 = \frac{1}{d_1}\left(N_{30} - pN_9 + N_{11} - d_2 N_{12} + N_{14} - \beta N_{13} - \sum_{j=1}^{N} K_j \lambda_j\right);$$

$$N_{16} = \frac{\nu d_1 N_{11}}{d_1^2 - p^2};\ N_{15} = \frac{1}{d_1^2 - p^2}\left(-\nu N_{11} + \nu d_1 C_7 + 2d_1 N_{16}\right);\ N_{18} = \frac{-\nu N_{10}}{4}; \tag{9}$$

$$N_{17} = -\frac{1}{2p}\left(-\nu N_{10} + \nu p N_9 - 2N_{18}\right);\ N_{19} = \frac{\nu d_2 N_2}{d_2^2 - p^2};\ N_{21} = \frac{\nu\beta N_{14}}{\beta^2 - p^2};$$

$$N_{20} = \frac{1}{\beta^2 - p^2}\left(-\nu N_{14} + \nu\beta N_{13} + 2\beta N_{21}\right);\ L_j = \frac{-\nu\lambda_j K_j}{\lambda_j^2 - p^2}\ \ (j = \overline{1,N});$$

$$C_9 = \frac{f^*(p)}{p} - C_7 - N_{15} - N_{19} - N_{20} - \sum_{j=1}^{N} L_j;\ N_{23} = -\frac{\beta_{23} d_1 N_{11}}{d_1^2 - d_2^2};\ N_{25} = -\frac{\beta_{23} p N_{10}}{p^2 - d_2^2};$$

$$N_{22} = \frac{1}{d_1^2 - d_2^2}\left(\beta_{23} N_{11} - \beta_{23} d_1 C_7 + 2d_1 N_{23}\right);\ N_{24} = \frac{1}{p^2 - d_2^2}\left(\beta_{23} N_{10} - \beta_{23} p N_9 + 2pN_{25}\right);$$

$$N_{26} = \frac{1}{2}\beta_{23} N_{12};\ N_{28} = -\frac{\beta_{23}\beta N_{14}}{\beta^2 - d_2^2};\ N_{27} = \frac{1}{\beta^2 - d_2^2}\left(\beta_{23} N_{14} - \beta_{23}\beta N_{13} + 2N_{18}\right);$$

$$M_j = -\frac{\beta_{23}\lambda_j K_j}{\lambda_j^2 - d_2^2}\ \ (j = \overline{1,N});\ C_{11} = -N_{22} - N_{24} - N_{27} - \sum_{j=1}^{N} M_j.$$

Анализ решения (6)–(8) в пространстве изображений позволяет сделать следующие выводы: слагаемые с множителями $e^{-px}$ и $e^{-d_2 x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимися с самой высокой скоростью, равной единице (в безразмерном виде); слагаемые с множителями $e^{-d_1 x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимися со скоростью распространения поперечных возмущений (в безразмерном виде это равно примерно 0,54); слагаемые с множителями $e^{-\beta x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимися со скоростью распространения волновых возмущений в жидкости (в безразмерном виде это равно примерно 0,25); слагаемые с множителями $e^{-\lambda_j x}$ соответствуют слагаемым, которые возникают вследствие применения метода Галеркина (здесь присуствуют возмущения, распространяющиеся со всеми вышеперечисленными скоростями системы). Сходимость метода Бубнова-Галеркина рассматривалась в практичесеком смысле.

## 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

На основании найденного решения (6)–(9) получены численные результаты для импульсной нагрузки $f(t) = V_0 \leq 0,03C_p$ [10]. Результаты представлены для различных значений коэффициента взаимосвязи $K_s$. Необходимо отметить, что значение $K_s = 0$ соответствует отсуствию жидкости в оболочке, а для системы алюминий–керосин при $h/R = 0,1$ коэффициент взаимосвязи $K_s \approx 10$. На рис.1 показано продольное напряжение на стенке оболочки в сечении $x = 1$. В момент времени $t = x/C_p = 1/1 = 1$ этого сечения достигает самая быстрая (продольная) волна в оболочкеб а при $t = x/C_v = 1/0,54 \approx 1,85$ этого сечения достигает поперечная волна в оболочке. При $t = x/a = 1/0,25 = 4$ этого

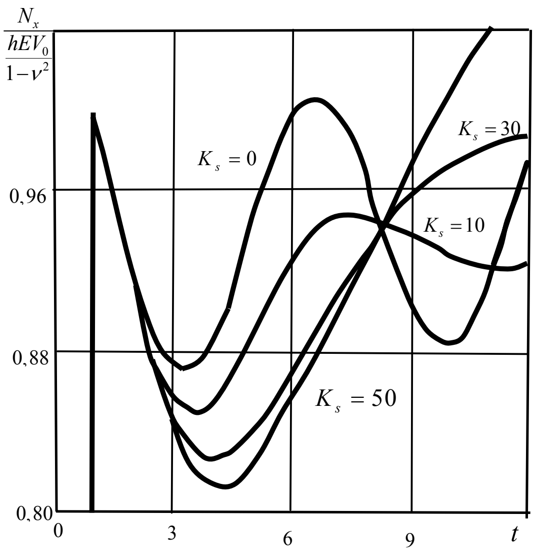


Рис.1

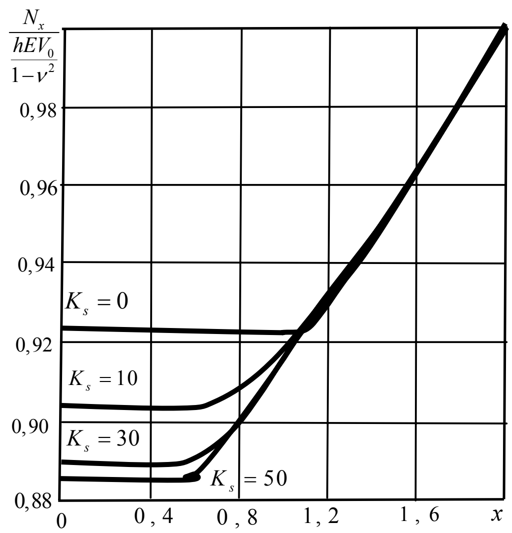


Рис.2

сечения достигает волна сжатия в жидкости. На рис.2 показано распределение продольных напряжений для момента времени $t = 2$ по продольной координате $x$. Область $x \in [0; 0,5]$ находится под воздействием всех трех основных волн в даной гидроупругой системе. Здесь влияние жидкости отчетливо просматривается (в отличие от области $x \in [1; 2]$, где это влияние практически незаметно. На рис.3 изображено значение угла поворота радиального волокна относительно оси $x$ по теории оболочек типа Тимошенко в момент времени $t = 2$ в зависимости от продольной координаты $x$.

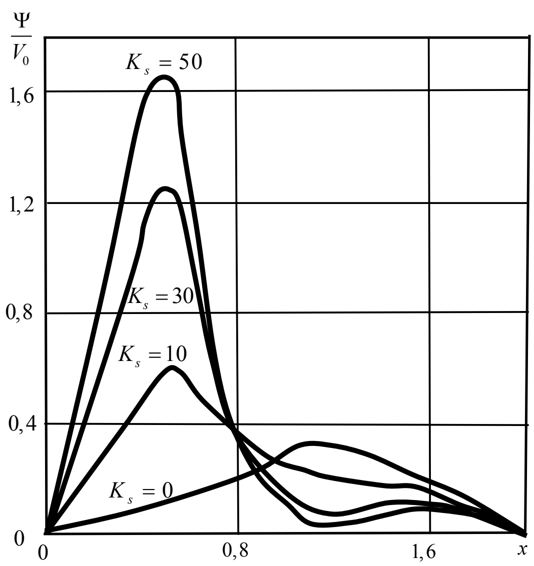


Рис.3

На основании результатов, представленных на рис.1,2 можно сделать вывод, что жидкость оказывает несущественное влияние на продольное напряжение в оболочке (влияние жидкости на поперечные перемещения проанализировано в [2,5]). Из результатов, представленных на рис.3 следует, что жидкость оказывает существенное влияние на угол поворота радиального волокна относительно оси $x$ по теории оболочек типа Тимошенко.

Таким образом в данной работе на основании разработанного подхода проанализировано влияние жидкости на продольное напряжение в оболочке и угол поворота радиального волокна относительно оси $x$ по теории оболочек типа Тимошенко для рассматриваемой гидроупругой системы.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Динамика элементов конструкций / Под ред. В.Д.Кубенко.–К.: “АСК”,1999.– 379с.– (Механика композитов. В 12-ти томах: Т.9)
2. Коваленко А.П. Исследование переходных процессов в цилиндрической оболочке с жидкостью при ударном возбуждении.–Прикл.механика,1979,15, №11,с.68-75.
3. Коваленко А.П. О взаимодействии оболочки с жидкостью при ударе о преграду.– Докл.АН УССР. Сер.А, 1980, №1, С.38-41.
4. Коваленко А.П. Анализ погрешности численного обращения преобразования Лапласа - Карсона. //Труды IX научн. конф. мол. ученых Имех АН УССР.– 1982.– С.103-107.
5. Коваленко А.П. Знаходження потенціалу швидкостей рідини при поширенні хвиль в нескінченній циліндричній оболонці з рідиною. КОНСОНАНС-2005, Акустичний симпозіум (27-29 вересня 2005 р.). Збірник праць.-Київ.-2005 – С.209-214
6. Ковальчук П.С., Кубенко В.Д. Взаимодействие колеблющихся цилиндрических оболочек с содержащейся в них жидкостью /Динамика тел взаимодействующих со средой /. Под ред . А.Н.Гузя.–К.: Наук. Думка,1991.–С.168-214
7. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.– М.: Наука, 1974.–224с
8. Лурье А.И. Операционное исчисление. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.– 431с
9. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов.– М.: Наука, 1966.– 432с.
10. Сагомонян Е.А. О распространении продольных волн в цилиндрической оболочке.– Вестн.Моск.ун-та. Математика, механика. 1977.– №1.–С.111-112.
11. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976.–Т.2.–574с.
12. ЧжоуБей-чжи. Расчет осесимметричных движений цилиндрических оболочек по методу характеристик.- Ракетная техника и космонавтика,1968,№8, С.64-70.
13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции.– М.: Наука, 1977.– 342с.
14. Gerrmann G., Mirsky J. Three–dimensional and shell-theory analysis of axially motions of cylinder// J. Appl. Mech.–1956.–**23**, №4.–P.563-568.
15. Kovalenko A.P. Investigation of Translents in a Cylindrical Shell with Fluid under Shock Excitation //Soviet Appl. Mech.– 1979.–**15**, №11.–P.1067-1072.
16. Koval’chuk P.S., Filin V.G. On modes of Flexural of initially Bent Cylindrical Shells Partially Filled with a Liquid // Int. Appl. Mech.– 2003.–**39**, №4.–P.464-471.