

## ПРОЦЕСС РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕДАХ РАЗНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

М.И. ЖЕНИРОВСКИЙ<sup>1</sup>, В.Т. МАЦЫПУРА<sup>2</sup>, А.А. СНАРСКИЙ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины, Киев

<sup>2</sup>Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

<sup>3</sup>Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Проведен анализ распространения волн в дискретных и непрерывных средах разной физической природы, параметры которых претерпевают периодические изменения. Исследованы частотные зоны проникновения и “запираания” таких сред для волнового процесса.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследованию процесса распространения волн в дискретных и непрерывных средах разной физической природы, параметры которых претерпевают периодические изменения, посвящено значительное число работ. Однако некоторые моменты, связанные с предельным переходом от конечного количества звеньев, которые формируют среду, до их бесконечного количества еще требуют осмысления. Здесь возможно возникновение нестандартных ситуаций, анализу которых и посвящена данная работа.

Под дискретной средой будем понимать совокупность звеньев акустического, механического или электрического фильтра. Использование электроакустической либо электромеханической системы аналогий позволяет построить электрический аналог акустической или механической системы с сосредоточенными параметрами. Такая процедура очень удобна, т. к. введение комплексного импеданса позволяет свести анализ цепи к алгебраическим операциям с комплексными величинами амплитуд токов и напряжений.

Использование понятия входного импеданса также позволяет с единых позиций рассмотреть такие, казалось бы, далекие друг от друга на первый взгляд задачи физики как прохождение звука через слоистую среду, распространение электромагнитной волны вдоль дискретно неоднородной длинной линии, движение электрона в среде со скачками потенциала.

### 1. СИСТЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Обратимся к хорошо известной из классического курса общей физики задаче об импедансе  $LC$ -лестничной цепи. Удивительно, что даже в известных учебниках по курсу общей физики, например [1] и [2], даны разные решения этой задачи (см. также [3]). Импеданс  $Z$  бесконечной лестничной цепи можно найти в ходе итерационного процесса [4]

$$Z_{n+1} = f(Z_n), \quad f(Z_n) = z_1 + \frac{Z_n z_2}{Z_n + z_2}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (1)$$

где  $Z_n$  – импеданс цепи, состоящей из  $n$  звеньев,  $z_1$  и  $z_2$  – комплексные сопротивления.

При любых  $z_1$  и  $z_2$  есть неподвижная точка  $\tilde{Z}$ , которая определяется из уравнения  $\tilde{Z} = f(\tilde{Z})$ :  $\tilde{Z} = \frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + z_1 z_2}$ . Если неподвижная точка  $\tilde{Z}$  является устойчивой, то импеданс  $Z$  бесконечной лестничной цепочки существует и является пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \tilde{Z}$ . В противном случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$  не существует, а это означает, что не имеет смысла говорить об импедансе бесконечной цепочки.

Анализ соотношения (1) показывает, что в случае чисто мнимых величин  $z_1$  и  $z_2$  (цепочка состоит из идеальных емкостей и индуктивностей) при определенных значениях  $z_1$  и  $z_2$  не существует устойчивой неподвижной точки  $\tilde{Z}$ . Неподвижная точка  $\tilde{Z}$  итерационного процесса (1) устойчива, если [5,6]  $\left| \frac{df(Z_n)}{dZ_n} \right|_{Z=\tilde{Z}} < 1$ . Введя обозначение  $\xi = -z_1/z_2$ , можно показать, что в диапазоне  $0 \leq \xi \leq 4$  условие устойчивости не выполняется.

Рассмотрим подробнее случай чисто мнимых величин  $z_1$  и  $z_2$  с разными знаками. Если  $z_1 = i\omega L$  и  $z_2 = 1/(i\omega C)$ , то при частоте  $\omega > \omega_0 = 2/\sqrt{LC}$ , неподвижная точка устойчива, импеданс бесконечной цепочки существует и, как и следовало ожидать, является чисто мнимым. Неподвижной устойчивой точки не существует при частоте  $\omega < \omega_0 = 2/\sqrt{LC}$ , и, следовательно, нельзя говорить об импедансе бесконечной цепочки.

Обратимся к численным результатам. На рис. 1 показан ход итерационного процесса (1) для двух ситуаций, когда частота  $\omega < \omega_0$  (рис. 1а) и  $\omega > \omega_0$  (рис. 1б). Как видим, характер итерационного процесса для двух ситуаций существенно отличается. Если при частоте  $\omega = 1,7 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1} > \omega_0$  (рис. 1б) итерационный процесс быстро сходится, что позволяет определить импеданс бесконечной цепочки, то при  $\omega = 1,02 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1} < \omega_0$  (рис. 1а) наблюдается нерегулярный характер процесса, что говорит об отсутствии сходимости.

Очевидно, следует ожидать, что величина импеданса  $Z_n$ , при фиксированном числе итераций  $n$ , для разных значений частоты  $\omega$  из диапазона  $\omega < \omega_0$  будет существенно отличаться. Этот вывод наглядно иллюстрируется расчетами, которые представлены на рис. 2. Здесь в интервале частот  $\omega < \omega_0$  наблюдаем сильную нерегулярность значений импеданса, а при  $\omega > \omega_0$  имеем плавный рост соответствующей зависимости.

Таким образом, согласно результатам расчетов (рис. 2), незначительные изменения частоты  $\omega$  в интервале  $\omega < \omega_0$  приводит к существенному изменению хода итерационного процесса. Это свидетельствует о неустойчивости траектории итерационного процесса, который является одной из особенностей хаотического режима динамической системы.

Проведенное исследование итерационного процесса (1) позволяет сказать, что при частоте  $\omega > \omega_0$  импеданс бесконечной  $LC$ -цепочки существует, а на частотах  $\omega < \omega_0$  говорить о его величине не имеет смысла. В действительности, как известно [7, с. 323-

325], для конечного фильтра из  $n$  звеньев с чисто мнимыми элементами существуют два решения, связывающие напряжения  $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$  на входе и  $U_n(t)$  на выходе.

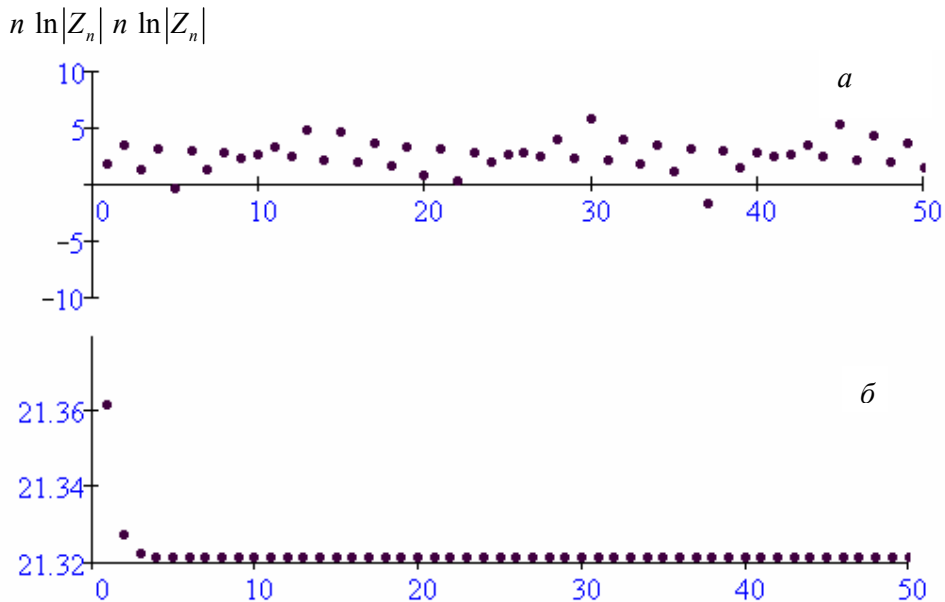


Рис. 1. Последовательность значений итерационного процесса; параметры цепочки  $L = \sqrt{3} \cdot 10^{-2}$  Гн,  $C = 10^{-4}$  Ф,  $\omega_0 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ : а –  $\omega = 1,02 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1} < \omega_0$ , б –  $\omega = 1,7 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1} > \omega_0$

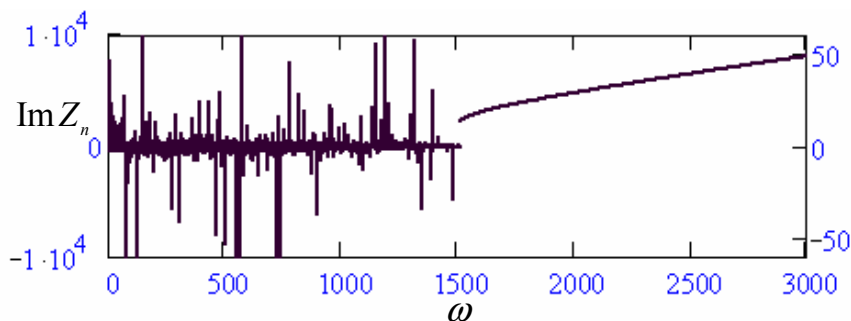


Рис. 2. Зависимость импеданса лестничной цепи от частоты  $\omega$ ; число элементов  $n = 300$  (левая шкала оси ординат соответствует частотам  $\omega < \omega_0$ , а правая –  $\omega > \omega_0$ ,  $\omega_0 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ )

## 2. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Во втором разделе статьи, в качестве примера системы с распределенными параметрами, рассмотрим прохождение плоской звуковой волны через слоистую среду при отсутствии потерь. Пусть имеем среду, которая состоит из плоских однородных слоев с чередующимися свойствами, т. е. от слоя к слою волновое сопротивление равно  $z_1 = \rho_1 c_1$  или  $z_2 = \rho_2 c_2$ , где  $\rho_1, \rho_2$  - плотность и  $c_1, c_2$  - скорость звука в соответствующем слое. Справа слоистая конструкция опирается на препятствие с импедансом  $Z_0$ , а слева имеем слой с волновым сопротивлением  $z_2$ . Отметим, что номер  $n = 1, 2, 3, \dots$  будет

фіксувати кількість пар шов с параметрами  $z_1$  и  $z_2$ . Слева от последнего шов располагается среда с волновым сопротивлением  $z_1$ .

Входной импеданс одного шов с волновым сопротивлением  $z$  и толщиной  $a$ , который опирается на препятствие с импедансом  $Z_0$ , определяется соотношением [8]:

$Z = z \frac{Z_0 - iz \operatorname{tg}(ka)}{z - iZ_0 \operatorname{tg}(ka)}$ , где  $k = \omega/c$ . Располагая слева от препятствия парное количество шов, можно построить итерационный процесс для определения входного импеданса шовистой конструкции, которая опирается на препятствие с известным импедансом  $Z_0$ :

$$Z_{n+1} = z_2 \frac{z_1 \frac{Z_n - iz_1 \operatorname{tg}(k_1 a_1)}{z_1 - iZ_n \operatorname{tg}(k_1 a_1)} - iz_2 \operatorname{tg}(k_2 a_2)}{z_2 - iz_1 \frac{Z_n - iz_1 \operatorname{tg}(k_1 a_1)}{z_1 - iZ_n \operatorname{tg}(k_1 a_1)} \operatorname{tg}(k_2 a_2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (2)$$

Энергетический коэффициент отражения  $V_n$  от соответствующей шовистой конструкции определится выражением [8]:  $V_n = \left| \frac{Z_n - z_1}{Z_n + z_1} \right|^2$ .

Перейдем к анализу численных результатов. Зададим параметры шовистой конструкции: относительные волновые сопротивления сред шов  $z_1/Z_0 = 2,1$  и  $z_2/Z_0 = 0,7$ ; отношение волновых толщин шов  $k_2 a_2 / (k_1 a_1) = 2,2$ . На рис. 3 показана зависимость коэффициента отражения  $V_n$  от волновой толщины шов  $k_1 a_1$ , число итераций  $n = 200$ . Как видно, можно выделить зоны запираения шовистой конструкции (здесь  $V_n = 1$ ) и зоны пропускания звука, в которых коэффициент пропускания претерпевает осцилляции при изменении частоты сигнала.

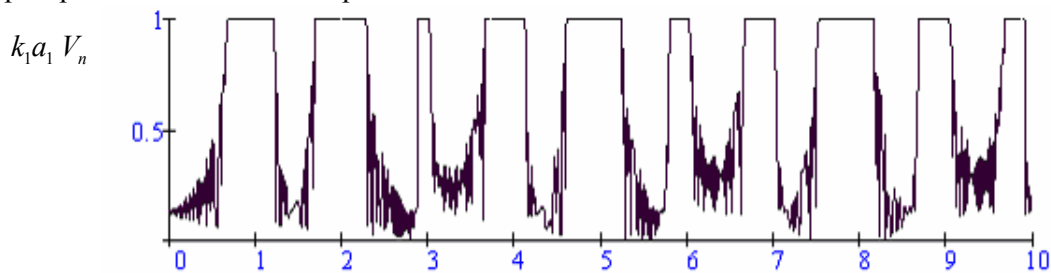


Рис. 3. Зависимость энергетического коэффициента отражения  $V_n$  от волновой толщины шов  $k_1 a_1$ ; число парных шов  $n = 200$ .

Естественно возникает вопрос: как изменяется величина коэффициента отражения  $V_n$  в зависимости от количества парных шов  $n$  или, другими словами, сходится или нет итерационный процесс (2) для областей пропускания и запираения шовистой конструкции. Проведенные расчеты показали, что если в зоне запираения уже после нескольких итераций коэффициент отражения становится равным единице, то в зоне пропускания звука значение коэффициента отражения совершает квазипериодические осцилляции относительно некоторой средней величины.

Таким образом, можно заключить, что для рассматриваемой слоистой конструкции итерационный процесс (2) сходится для частот соответствующих зонам запираия и не сходится на частотах прохождения звука через слоистую среду.

Совершенно аналогичная ситуация имеет место и в задаче о распространении сигнала в кусочно-неоднородной длинной линии без затухания с погонными индуктивностью и емкостью  $L_p, C_p$ ,  $p=1,2$  соответственно. Коэффициент отражение входного сигнала от такой периодической структуры можно получить, используя итерационный процесс (2), где теперь  $k_p = \omega \sqrt{L_p C_p}$ ,  $z_p = \sqrt{L_p / C_p}$ ,  $p=1,2$ .

Согласно численному счету по алгоритму (2), как и должно быть в строго периодической линии, наблюдается зонная структура “запираие-прохождение”, подобная той, что показана на рис. 3. При введении случайного разброса, например, длины отрезков  $a_1$  и  $a_2$  длинной линии, зонная структура разрушается и с ростом числа звеньев длинная линия запирается во все большем диапазоне частот. Для характеристики степени запираия введем величину, которую естественно назвать плотность запрещенных зон в данном диапазоне частот:

$$G = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) d\omega, \quad f(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{пропускание,} \\ 1, & \text{запираие.} \end{cases} \quad (3)$$

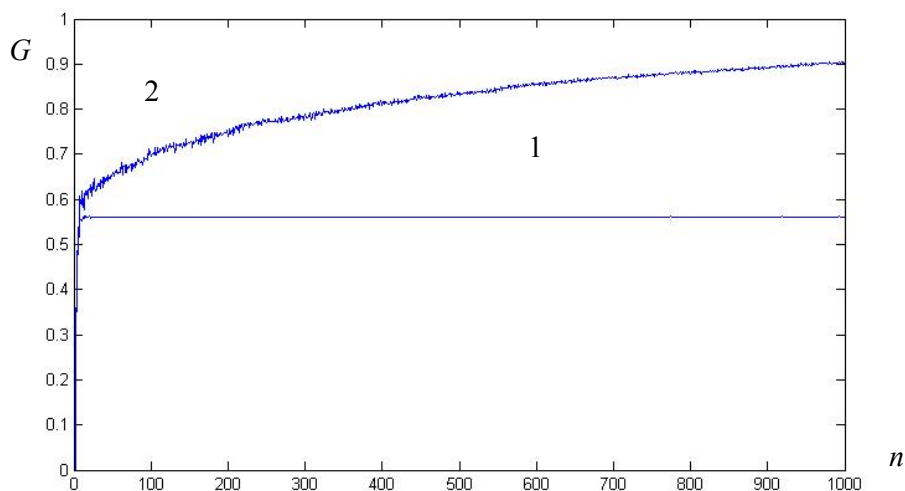


Рис. 4. Зависимость  $G$  от числа звеньев  $n$  для периодической длинной линии (кривая 1) и случайной реализации длинной линии (кривая 2):  $\omega_1 = 2,586 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 8 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ , интервал случайного разброса величин  $a_1$  и  $a_2$  составляет  $\pm 4\%$ .

На рис. 4 приведена зависимость величины  $G$  от числа звеньев  $n$  для периодической длинной линии (кривая 1) и для случайной реализации длинной линии (кривая 2). Такое “запираие” проводимости одномерной системы хорошо известно в физике твердого тела под названием локализация Андерсона [10].

### 3. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

При исследовании прохождения электрона над системой потенциальных барьеров с периодически повторяющимися свойствами, можно построить итерационный процесс, который приводит к соотношению аналогичному формуле (2), (см. близкие рассуждения в [9]). В барьерных задачах также принято вводить такую характеристику, как коэффициент отражения, который аналогичен коэффициенту отражения  $V_n$  в слоистых структурах.

Отсюда следует очевидный вывод: так же как и в системах с распределенными параметрами, при нарушении периодической зависимости потенциальной энергии барьера от координаты происходит запираание рассматриваемой квантовомеханической системы.

Конечно, в двух и трехмерном случаях все существенно сложнее. Удивительно, однако, что одномерный случай такого сложного явления как андерсоновская локализация [10] может быть понят на основе всё тех же соображений о волнах в периодических системах с внесенным беспорядком, которые рассматривались выше.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исследование процесса распространения волн в дискретных и непрерывных средах разной физической природы, в конечном итоге, можно свести к анализу итерационного процесса, который определяет входной импеданс структуры в зависимости от числа звеньев в дискретной цепи либо числа однородных слоев (отрезков длинной линии, потенциальных ступенек) непрерывной среды.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. – М.: Мир, 1977. – 347 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 3. Электричество. – М.: Физматлит, 2004. – 656 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
4. Дыхне А.М., Снарский А.А., Женировский М.И. Устойчивость и хаос в двумерных случайно-неоднородных средах и LC-цепочках // УФН. – 2004. – 174, №8. – С. 887-894.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
6. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. Изд. 2-е. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 264 с.
7. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. Том 4. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 512 с.
8. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Изд-во АН СССР, 1957, – 503 с.
9. Нелин А.А. Импедансная модель для “барьерных” задач квантовой механики // УФН. – 2007. – 177, №3. – С. 308-313.
10. Гантмахер В.Ф. Электроны в неупорядоченных средах. – М.: Физматлит, 2003. – 176 с.