

## ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ОДИНОЧНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ С ВНУТРЕННЕЙ ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ СРЕДОЙ

**А.И. ДРОЗДЕНКО, ассистент,**  
кафедра акустики и акустоэлектроники,  
Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев.  
E-mail: [sdlm@bk.ru](mailto:sdlm@bk.ru)

Цилиндрические пьезокерамические преобразователи получили широкое распространение в качестве элементов электроакустического преобразования энергии многих акустических систем. Рассматривается задача получения волн сплошным цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем с радиальной поляризацией. Преобразователь находится в среде с параметрами  $\rho_1 c_1$ , внутренняя полость излучателя заполнена средой с параметрами  $\rho_2 c_2$ . Расчет акустического поля производится методом частичных областей. Найдены аналитические зависимости для акустического давления во внутренней и внешней областях. На основании аналитических зависимостей изучены звуковые поля излучателя при различных параметрах жидкости, заполняющей внутреннее пространство.

Цилиндрический пьезокерамический преобразователь (рис.1) набран из идентичных круговых пьезокерамических колец. Толщина кольца  $h$  значительно меньше среднего радиуса  $r_{cp}$ . Кольца поляризованы в радиальном направлении. Для цилиндрической оболочки, образованной из таких колец, будем считать справедливой прикладную теорию, основанную на гипотезах Кирхгофа-Лява. Колебания кольца вызываются гармоническим напряжением  $u(t) = Ue^{-j\omega t}$  от генератора электрических напряжений. При таком возбуждении возникают колебания нулевой моды (пульсирующие), при которых все части кольца (оболочки) колеблются с одинаковой фазой и амплитудой. Поскольку толщина и высота колец в оболочке малы по сравнению с радиусом  $r_{cp}$ , то можно считать, что толщинная и осевая деформация колец малы и их можно не учитывать. Это позволяет рассматривать колебания оболочки как движение с одной степенью свободы.

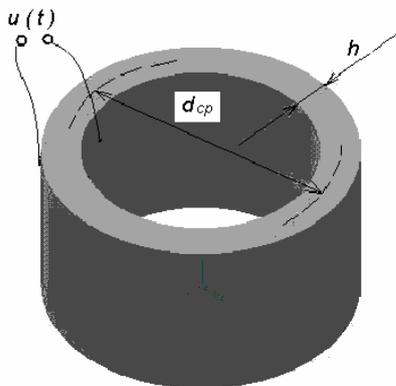


Рис.1.

Дифференциальное уравнение движения цилиндрической пьезокерамической оболочки в вакууме с одной степенью свободы имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{r_{cp}^2 \rho_k s_{11}^E} \xi = \frac{d_{31}}{r_{cp} \rho_k s_{11}^E} E_3 \quad (1)$$

При  $E_3 = 0$  оболочка электрически не нагружена и ее резонансная частота  $\omega_0$  в вакууме равна:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{r_{cp}^2 \rho_k s_{11}^E} \quad (2)$$

В реальных излучателях действуют следующие силы: сила упругости; возбуждающая сила, сила, обусловленная вязким упругим внутренним трением; сила реакции окружающей среды на возбуждение в ней акустического поля. С учетом действия сил, дифференциальное уравнение движения оболочки приобретает вид [2]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{Q_m r_{cp}} \sqrt{\frac{1}{\rho_k s_{11}^E}} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{r_{cp}^2 \rho_k s_{11}^E} \xi = \frac{d_{31}}{r_{cp} \rho_k s_{11}^E} E_3 + \frac{\Delta p}{\rho_k h}, \quad (3)$$

где  $\Delta p = p_1 - p_2$  – разность давлений, действующих на оболочку снаружи и изнутри.

Уравнение (3) можно преобразовать к виду:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + r_{mn} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{c_m} \xi = \frac{d_{31} U}{r_{cp} s_{11}^E} + \Delta p, \quad (4)$$

где  $m = \rho_k h$ ,  $c_m = \frac{r_{cp}^2 s_{11}^E}{h}$ ,  $r_{mn} = \frac{\rho_k h}{Q_m r_{cp}} \sqrt{\frac{1}{\rho_k s_{11}^E}} = \frac{m \omega_0}{Q_m}$  – соответственно масса, упругость и сопротивление механических потерь оболочки на единицу поверхности оболочки;  $U = h E_3$  – электрическое напряжение между электродами оболочки.

Учитывая гармонический характер электрического возбуждения преобразователя, механические колебания также являются гармоническими  $\xi = \xi_m e^{-j\omega t}$  и уравнение (4) приобретает вид:

$$-m \omega^2 \xi + j \omega r_{mn} \xi + \frac{1}{c_m} \xi = \frac{d_{31} U}{r_{cp} s_{11}^E} + \Delta p. \quad (5)$$

Тогда смещение стенки оболочки

$$\xi_m = \frac{\frac{d_{31}}{r_{cp} s_{11}^E} U + \Delta p}{j \omega \left[ r_{mn} + j \left( \omega m - \frac{1}{\omega c_m} \right) \right]}, \quad (6)$$

а колебательная скорость на нулевой моде

$$v_m = \frac{\partial \xi_m}{\partial t} = j \omega \xi_m = \frac{\frac{d_{31}}{r_{cp} s_{11}^E} U + \Delta p}{\left[ r_{mn} + j \left( \omega m - \frac{1}{\omega c_m} \right) \right]}. \quad (7)$$

Из уравнений связи и пьезоэлектрического эффекта, электрическая индукция для нашего случая [1]:

$$D_3 = \frac{d_{31} \xi}{r_{cp} s_{11}^E} + \varepsilon_{33}^T (1 - K_{31}^2) E_3, \quad K_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} \quad (8)$$

Сила тока, приходящаяся на единицу поверхности, является производной по времени от электрической индукции:  $I = j \omega D_3$ .

С учетом выражений (6) и (8) при  $E_3 = \frac{U}{h}$  получаем:

$$I = j\omega \left[ \left( \frac{d_{31}}{r_{cp} s_{11}^E} \right)^2 \frac{U}{j\omega z_{экв}} + \frac{d_{31}}{r_{cp} s_{11}^E} \frac{\Delta p}{j\omega z_{экв}} + \varepsilon_{33}^T (1 - K_{31}^2) \frac{U}{h} \right], \quad (9)$$

где  $z_{экв} = r_{mn} + j \left( \omega m - \frac{1}{\omega c_m} \right)$  – механический импеданс оболочки преобразователя,

приходящийся на единицу его высоты. Поскольку  $C_{эл} = \frac{\varepsilon_{33}^T (1 - K_{31}^2)}{h}$  – электрическая

емкость преобразователя-цилиндра на единицу его высоты, а  $n = \frac{d_{31}}{r_{cp} s_{11}^E}$  – коэффициент

электромеханической трансформации преобразователя на единицу его высоты, то с

учетом диэлектрических потерь в преобразователе  $R_{эн} = \frac{1}{\omega C_{эл} \operatorname{tg} \delta} = \frac{Q_{эл}}{\omega C_{эл}}$  выражение (9)

можно представить в виде:

$$I = U \left( j\omega C_{эл} + \frac{1}{R_{эн}} + \frac{n^2}{z_{экв}} \right) + \frac{n}{z_{экв}} \Delta p \quad (10)$$

Эквивалентная электромеханическая схема преобразователя представлена на рисунке 2.

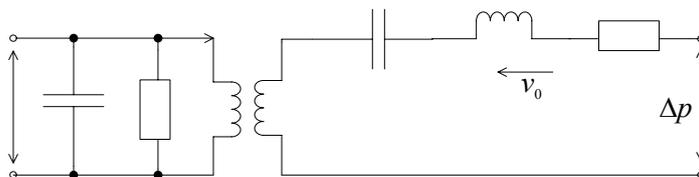


Рис.2

Будем считать, что излучатель имеет бесконечную длину и находится в среде с параметрами  $\rho_1 c_1$ . Внутренняя полость излучателя заполнена средой с параметрами  $\rho_2 c_2$ . Естественно, что внутренний объем жидкости в преобразователе сопротивляется колебаниям внутренней поверхности излучателя, также как и внешняя среда. Характер сопротивления будет чисто реактивным – до первого резонанса объема и чисто упругим после.

Звуковое поле излучателя состоит из внешнего  $p_1$  и внутреннего  $p_2$  полей. Оба поля не зависят от координаты  $z$  и имеют радиальную симметрию. Для принятой временной зависимости  $e^{-j\omega t}$ :

$$\text{- внешнее поле } p_1 = A_0 H_0^{(1)}(k_1 r); \quad (11)$$

$$\text{- внутреннее поле } p_2 = B_0 J_0(k_2 r). \quad (12)$$

Внешнее поле представлено расходящимися волнами, убывающими на бесконечности. Внутреннее поле представлено сходящимися волнами, не имеющими особенностей внутри объема цилиндра. Колебательная скорость вне  $v_1$  и внутри  $v_2$  излучателя имеют вид:

$$v_1 = \frac{1}{j\omega \rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{k_1}{j\omega \rho_1} A_0 H_0'(k_1 r) = \frac{1}{j\rho_1 c_1} A_0 H_1^{(1)}(k_1 r) \quad (13)$$

$$v_2 = \frac{1}{j\omega\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{k_2}{j\omega\rho_2} B_0 J_0'(k_2 r) = \frac{1}{j\rho_2 c_2} B_0 J_1(k_2 r) \quad (14)$$

Неизвестные комплексные коэффициенты определяются из системы функциональных уравнений, отражающие граничные условия на поверхностях (внешней и внутренней) преобразователя и условия сопряжения акустических, механических и электрических полей в преобразователе:

$$p_1|_{r=r_1} - p_2|_{r=r_2} + v_0 z_{\text{эке}} = nU; \quad v_1|_{r=r_1} = v_2|_{r=r_2} = v_0, \quad (15)$$

где  $v_0$  – приведенная амплитуда колебательной скорости на поверхностях преобразователя, которая предполагается одинаковой на его внешней и внутренней поверхностях.

Подставив в условие (15) выражения (11) - (14), определим неизвестные коэффициенты  $A_0$  и  $B_0$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= j\rho_1 c_1 \left[ \frac{nU}{j\rho_1 c_1 \frac{H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - j\rho_2 c_2 \frac{J_0(k_2 r_2)}{J_1(k_2 r_2)} + z_{\text{эке}}} \right] \cdot \frac{H_0^{(1)}(k_1 r)}{H_1^{(1)}(k_1 r)} \\ v_1 &= \left[ \frac{nU}{j\rho_1 c_1 \frac{H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - j\rho_2 c_2 \frac{J_0(k_2 r_2)}{J_1(k_2 r_2)} + z_{\text{эке}}} \right] \cdot \frac{H_1^{(1)}(k_1 r)}{H_1^{(1)}(k_1 r_1)} \\ p_2 &= j\rho_2 c_2 \left[ \frac{nU}{j\rho_1 c_1 \frac{H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - j\rho_2 c_2 \frac{J_0(k_2 r_2)}{J_1(k_2 r_2)} + z_{\text{эке}}} \right] \cdot \frac{J_0(k_2 r)}{J_1(k_2 r_2)} \\ v_2 &= \left[ \frac{nU}{j\rho_1 c_1 \frac{H_0^{(1)}(k_1 r_1)}{H_1^{(1)}(k_1 r_1)} - j\rho_2 c_2 \frac{J_0(k_2 r_2)}{J_1(k_2 r_2)} + z_{\text{эке}}} \right] \cdot \frac{J_1(k_2 r)}{J_1(k_2 r_2)} \end{aligned} \quad (16)$$

Выражение в квадратных скобках в знаменателе представляет механический импеданс  $z_M$  преобразователя, который в соответствии с эквивалентной электро-механической схемой состоит из трех составляющих:

- импеданса внешней поверхности  $z_{\text{изл1}} = -\frac{p_1}{v_1} \Big|_{r=r_1}$ ,
- импеданса внутренней поверхности  $z_{\text{изл2}} = -\frac{p_2}{v_2} \Big|_{r=r_2}$ ,
- импеданса пьезокерамической оболочки  $z_{\text{эке}}$ .

$$z_M = z_{\text{изл1}} + z_{\text{изл2}} + z_{\text{эке}} \quad (17)$$

Введем безразмерный коэффициент  $M$ , равный отношению волновых импедансов внешней и внутренней сред:

$$M = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}$$

Произведено вычисление модуля механического сопротивления для преобразователя с резонансной частотой  $f_0 = 10500 \text{Гц}$  ( $\omega_0 = 65940 \text{рад/с}$ ) в вакууме. Рабочая среда – вода. Рассмотрены ситуации, когда  $M \gg 1$ ,  $M = 1$ ,  $M \ll 1$ . Соответствующие графики представлены на рис. 3 – 5.

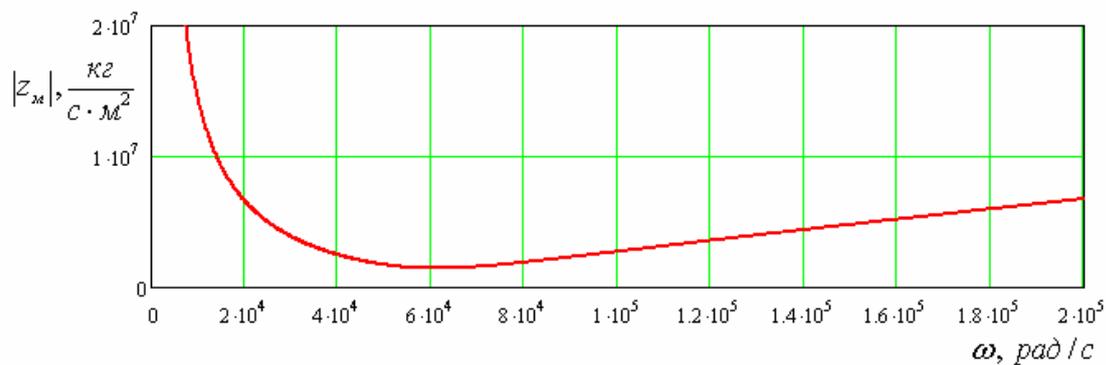


Рис.3

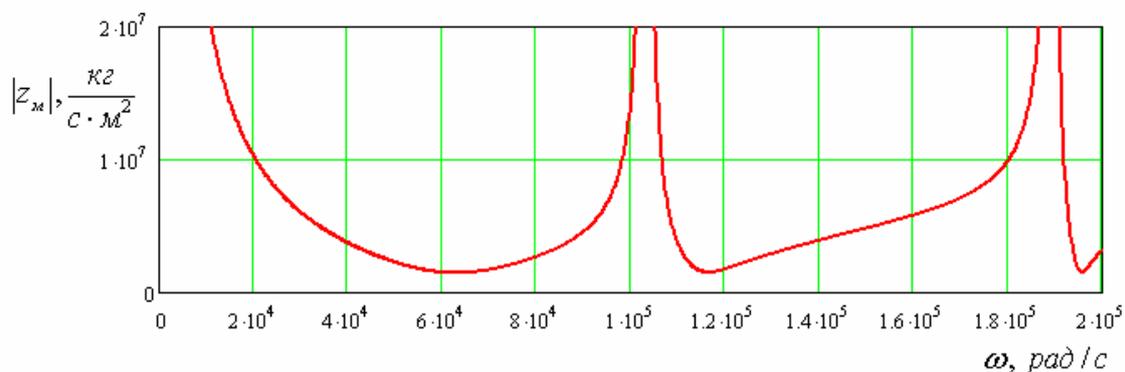


Рис.4

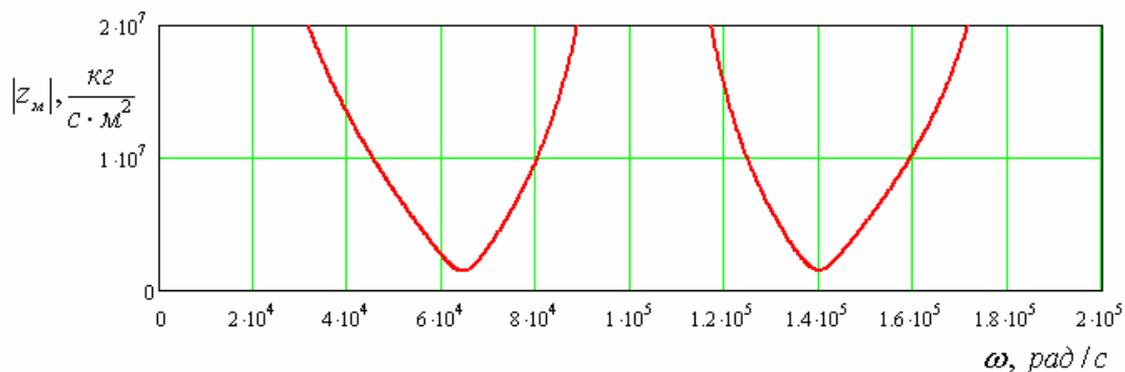


Рис.5

Таким образом, из приведенных примеров вычислений следует, что частотная характеристика преобразователя, внутренняя полость которого заполнена средой с волновым сопротивлением гораздо меньшим, чем волновое сопротивление рабочей среды имеет один явно выраженный минимум, который соответствует резонансной частоте преобразователя в вакууме. Напротив, при заполнении внутренней полости преобразователя средой с волновым сопротивлением равным, или большим, чем волновое сопротивление рабочей среды частотная характеристика имеет разрывы и несколько следующих друг за другом минимумов, соответствующих резонансам внутренней полости.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. – Л.: Судостроение, 1972.– 352с.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.– К.: Наукова думка, 1989.–280с.