

# ОСОБЕННОСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАПОЛНЕННОМ И ОКРУЖЕННОМ ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРЕ ИЗ МЯГКОГО МАТЕРИАЛА

В. Т. ГРИНЧЕНКО, Г. Л. КОМИССАРОВА

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев*

В заполненном и окруженном жидкостью цилиндре из податливого материала исследованы свойства волн, неподверженных радиационному демпфированию. Анализ дисперсионных характеристик волн в этой волноводной системе показал, что в ней кроме первых двух волн с нулевыми частотами запертия существуют незатухающие волны высших порядков. Первые две незатухающие волны с увеличением волнового числа трансформируются в волны Стоунли вблизи внешней и внутренней поверхностей цилиндра. Фазовые скорости волн Стоунли значительно меньше скорости звука в жидкости. Фазовые скорости незатухающих волн высших порядков с увеличением волнового числа стремятся к скорости волны сдвига материала цилиндра. Проведен анализ кинематических и энергетических характеристик незатухающих волн. Для податливого материала цилиндра волновое возмущение, соответствующее волне Стоунли, в равной мере охватывает упругую и жидкую составляющие волновода. Для незатухающих волн высших порядков волновое возмущение практически полностью сосредоточено в упругом цилиндре.

## ВВЕДЕНИЕ

Составные упруго-жидкостные цилиндрические волноводы условно можно разделить на два класса. К первому классу принадлежат волноводы, площадь поперечного сечения которых является конечной. Ко второму классу относятся волноводы, поперечное сечение которых не является конечным. Простейшими примерами таких волноводов являются соответственно заполненный жидкостью цилиндр и цилиндр, заполненный и окруженный жидкостью. При использовании моделей идеальных сред (упругой и жидкой) для описания волновых полей составляющих между этими классами составных волноводов проявляются существенные различия. В волноводах с конечным поперечным сечением возможно распространение большого количества бегущих волн, распространяющихся вдоль оси волновода без затухания [1]. В волноводах, окруженных идеальной жидкой средой, возникает специальный механизм затухания волновых движений, называемый радиационным демпфированием. Для волноводов этого класса возникает вопрос о наличии незатухающих волн, изучении их свойств и физической природы. Закономерности распространения волн в волноводах второго класса исследованы в работах [2].

На свойства волн в таких волноводных системах существенное влияние оказывают физические и геометрические параметры составляющих. Характер взаимодействия между упругой и жидкой составляющими волноводов существенно зависит от волновых сопротивлений материалов цилиндра и жидкости. При оценке влияния физических

параметров материала цилиндра различают два типа материалов. Если скорость волны сдвига материала цилиндра больше скорости звука в жидкости ( $V_S > C_0$ ), материал называют жестким. Если  $V_S < C_0$ , материал цилиндра называют мягким или податливым. Для жесткого материала плотность жидкости значительно меньше плотности материала цилиндра  $\rho_0/\rho_1 < 1$ . В случае податливого материала цилиндра плотности жидкости и материала цилиндра весьма близки. К податливым материалам относятся резина, мягкие пластмассы, мягкие биологические ткани.

Решение граничных задач в [2] получено на основе полной системы уравнений динамической теории упругости и уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости при учете излучения в окружающую среду. В этих работах получены дисперсионные характеристики волн, подверженных радиационному демпфированию, для случая жесткого материала цилиндра. В [3] показано, что в случае жесткого материала цилиндра в трехслойном волноводе существуют волны неподверженные радиационному демпфированию. Если скорость звука в окружающей жидкости больше или равна скорости звука в заполняющей жидкости ( $C_2 \geq C_0$ ), в волноводе существует две незатухающие волны. Если  $C_2 < C_0$ , в волноводе существует только одна незатухающая волна [3]. Анализ кинематических характеристик незатухающих волн в области сравнительно низких частот показал, что им соответствуют поверхностные волны типа Стоунли. Незатухающую волну вблизи поверхности контакта жидкой и упругой составляющих волновода называют волной Стоунли–Шолте или волной Шолте.

В данной работе в высокочастотной области (больших волновых чисел) исследованы дисперсионные характеристики незатухающих волн (неподверженных радиационному демпфированию) для данного волновода, а также проведен анализ кинематических и энергетических характеристик этих волн.

## 1 АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ ЗАПОЛНЕННОГО И ОКРУЖЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРА

В [4] представлены результаты исследования дисперсионных свойств для заполненного и окруженного водой цилиндра из жесткой резины с  $r_1 = 0.3$  ( $r_1 = R_1/R$ ,  $R_1$ ,  $R$  – внутренний и внешний радиусы полого цилиндра). Для рассматриваемого составного волновода  $V_S/C_0 = V_S/C_2 = 0.395$ ;  $\rho_0/\rho_1 = \rho_2/\rho_1 = 0.909$ ;  $\nu = 0.4$ .

Дисперсионное уравнение связывает безразмерные частоту  $\gamma_2$  и волновое число  $\zeta$  для заданных значений числа Пуассона  $\nu$ , отношения скоростей  $V_S/C_0$ ,  $V_S/C_2$  и плотностей  $\rho_0/\rho_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$ , а также геометрического параметра  $r_1$ . Здесь  $C_0$ ,  $C_2$  – скорости звука в заполняющей и окружающей жидкостях,  $\rho_0$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_1$  – плотности соответственно жидкостей и материала цилиндра. Безразмерное волновое число получено, умножением его размерной величины на  $R$ ;  $\gamma_2 = \omega R/V_S$ ,  $\omega$  – круговая частота; все линейные величины отнесены к  $R$ .

Дисперсионное уравнение волноводной системы при учете излучения в окружающую среду в общем случае является комплексным. Потенциал скорости окружающей жидкости в соответствии с условиями излучения представлен в виде

$$\varphi_2 = D_2 H_0^{(1)}(\chi_2 r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad \chi_2^2 = \gamma_2^2 \left(\frac{V_S}{C_2}\right)^2 - \zeta^2. \quad (1)$$

Корни комплексного дисперсионного уравнения не являются комплексно сопряженными. В секторе плоскости  $(Re\zeta, \gamma_2)$ , в котором величина  $\chi_2$  является мнимой, дисперсионное уравнение становится вещественным. Функции Ханкеля мнимого аргумента выражается через функции Макдональда согласно соотношений

$$H_0^{(1)}(i\chi_2^*r) = -i\frac{2}{\pi}K_0(\chi_2^*r), \quad H_1^{(1)}(i\chi_2^*r) = -\frac{2}{\pi}K_1(\chi_2^*r), \quad \chi_2^* = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_2^2\left(\frac{V_S}{C_2}\right)^2}. \quad (2)$$

Действительные корни дисперсионного уравнения, соответствующие незатухающим волнам, существуют именно в этом секторе.

Поиск комплексных корней дисперсионного уравнения, которое для данного волновода является комплексным трансцендентным, представляет собой весьма сложную задачу. Локализация комплексных корней дисперсионного уравнения основывается на определении их значений вначале на плоскости  $\gamma_2 = 0$ . На этой плоскости дисперсионное уравнение волновода становится действительным и имеет бесконечное количество комплексных корней. Комплексные корни являются комплексно сопряженными и образуют группы из четырех корней одинакового модуля (по одному в каждом квадранте плоскости). В [4] показано, что на этой плоскости для заполненного и окруженного жидкостью цилиндра в качестве начального приближения можно использовать значения комплексных корней для пустого цилиндра. Асимптотика комплексных корней на плоскости  $\gamma_2 = 0$  для пустого цилиндра приведена в [5]. С ростом частоты дисперсионное уравнение становится комплексным. В этом случае комплексные корни одной группы распадаются попарно на две подгруппы с разными модулями –  $\zeta_{1,2} = \pm(\xi_1 + i\eta_1)$  и  $\zeta_{3,4} = \pm(-\xi_3 + \eta_3)$ . Для описания свойств неоднородных волн одной группы, убывающих в заданном направлении оси  $z$ , для таких составных волноводов необходимо исследовать поведение двух корней с разными знаками вещественной составляющей.

В [4] представлено графическое изображение корней дисперсионного уравнения, отображающее зависимости действительной и мнимой составляющих волновых чисел от частоты. Действительная составляющая волнового числа определяет фазовую скорость неоднородной волны, мнимая составляющая – характеристики затухания волны. На рис.1 представлены графическое изображение корней дисперсионного уравнения для рассматриваемого волновода, отображающее зависимость действительной и мнимой составляющих волновых чисел от частоты. Здесь представлены дисперсионные ветви, соответствующие первым двум действительным корням и двум комплексным корням первой группы. Прямая  $OC$  ( $\chi_2 = 0$ ) делит плоскость

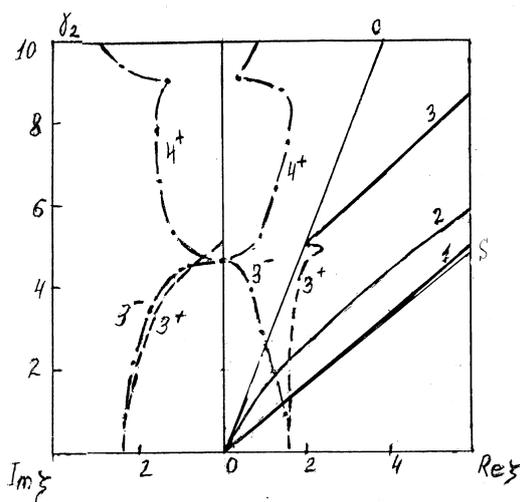


Рис. 1.

$(Re\zeta, \gamma_2)$  на две части. Ниже этой прямой  $\chi_2$  является мнимой. В этой области существует два действительных корня дисперсионного уравнения. Сплошные кривые 1 и 2, соответствующие действительным корням, проходят через начало координат и располо-

жены значительно ниже прямой  $OS$ . Следовательно, первые две незатухающие волны существуют при любой, сколь угодно малой частоте, и их фазовая скорость значительно меньше скорости звука в жидкости. Кривая 1 на рисунке графически совпадает с прямой  $OS$ , соответствующей фазовой скорости волны типа Стоунли. Следовательно, первая распространяющаяся волна может формировать волну типа Стоунли в этом волноводе.

Проекции комплексных корней на действительную и мнимую плоскости представлены кривыми  $3^+$  и  $3^-$ . Знак действительной составляющей корня указан при номере кривой. Проекция, соответствующая знаку “+”, изображены штриховыми, а знаку “-” – штрихпунктирными линиями. Действительная составляющая корня, соответствующая кривой  $3^+$ , с ростом частоты увеличивается. Проекция этой кривой на действительную плоскость характеризуется наличием широкой области частот, в которой существенное увеличение частоты вызывает незначительное увеличение действительной составляющей корня. В этой области фазовая скорость соответствующей неоднородной волны линейно возрастает с увеличением частоты. Комплексная кривая  $3^+$  при частоте  $\gamma_2 = 5.16$  становится действительной дисперсионной кривой 3, которой соответствует незатухающая волна.

Действительная составляющая корня, соответствующая кривой  $3^-$ , с ростом частоты уменьшается. Эта комплексная кривая с увеличением частоты проходит через первую частоту запирающей нормальной волны с продольно-сдвиговым типом движения ( $\gamma_{2,1}^* = 4.706$ ) [1]. Волны с этим типом движения не излучают энергию в окружающую среду. С повышением частоты эта кривая снова становится комплексной, но знак ее действительной составляющей изменяется. Эта кривая далее обозначена  $4^+$ . Действительные составляющие кривых  $3^+$ ,  $3^-$  и  $4^+$  существенно отличаются, мнимые составляющие кривых  $3^+$  и  $3^-$ , наоборот весьма близки в широкой области частот. Следовательно, наличие окружающей жидкости оказывает существенное влияние на значение фазовых скоростей и слабое влияние на характеристики затухания неоднородных волн в широкой области частот. Дисперсионные кривые, соответствующие комплексным кривым последующих групп, обладают аналогичными частотными зависимостями.

Сравнительный анализ данных для составных волноводов из жесткого [2] и податливого [4] материалов показывает, что фазовая скорость первых двух незатухающих волн существенно отличаются. В случае податливого материала цилиндра фазовая скорость этих волн значительно меньше скорости звука в жидкости, в случае жесткого материала – весьма близка к этой скорости. Фазовая скорость волны Стоунли в случае контакта полупространств для пары жесткая резина-вода равна  $C/V_S = 0.815624$  ( $C/C_0 = 0.32185$ ), для пары сталь-вода (жесткий материал)  $C/C_0 = 0.9997$  [3]. Главное отличие состоит в том, что в случае податливого материала цилиндра с увеличением волнового числа некоторые неоднородные волны высших порядков трансформируются в незатухающие волны. Фазовая скорость этих волн стремится сверху к скорости волны сдвига материала цилиндра. В [4] была обнаружена только одна такая незатухающая волна. Представление о скорости стремления фазовой скорости незатухающих волн к предельным значениям с увеличением волнового числа для рассмотренного волновода дают следующие данные. Относительная фазовая скорость третьей незатухающей волны  $C_{p3}/V_S = 1.00897$  при  $\zeta = 40$ , а при  $\zeta = 100$  – она равна 1.001225. Для четвертой незатухающей волны при  $\zeta = 100$  –  $C_{p4}/V_S = 1.00461$ .

Существенно отличаются также характеристики неоднородных волн для случаев

податливого и жесткого материала цилиндра. Дисперсионные характеристики неоднородных волн, распространяющихся в противоположных направлениях, в случае податливого материала отличаются в более широкой области частот по сравнению со случаем жесткого материала цилиндра. При этом отличия для фазовых скоростей более значительны по сравнению с характеристиками затухания.

При уменьшении толщины цилиндра (увеличении  $r_1$ ) дисперсионные характеристики первых двух распространяющихся волн ведут себя по-разному. Первая волна характеризуется тенденцией снижения фазовой скорости с увеличением  $r_1$ . Такое поведение представляется естественным поскольку для этой волны взаимодействие с жидкостью имеет характер присоединенной массы. Вторая волна связана с волновым движением в упругом цилиндре. В области низких частот фазовая скорость второй волны равна скорости стержневой волны в пустом цилиндре, которая возрастает с уменьшением толщины стенки цилиндра. Аналогичная тенденция поведения фазовой скорости первой волны наблюдается для заполненного жидкостью цилиндра из податливого материала [6].

## 2 КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН, НЕПОДВЕРЖЕННЫХ РАДИАЦИОННОМУ ДЕМПФИРОВАНИЮ

Формально процедура определения компонентов вектора перемещений состоит в том, что для заданных значений частоты  $\gamma_2$  и волнового числа  $\zeta$  произвольные постоянные в выражениях для перемещений в упругом цилиндре и потенциала скорости жидкости необходимо вычислить с точностью до одной из этих произвольных постоянных. При определении кинематических характеристик поверхностных волн необходимо воспользоваться методикой определения кинематических характеристик поверхностных волн в пустом цилиндре, разработанной в работе [7].

На приведенных ниже рисунках показано изменение по радиусу волновода нормированных амплитуд осевых и радиальных перемещений  $U_i^*(r) = U_i(r) / |U_{imax}|$  ( $i = r, z$ ) для заполненного и окруженного водой цилиндра из жесткой резины ( $r_1 = 0.7$ ). Кинематические характеристики, соответствующие первой волне, представлены на рис. 2 (а и б), второй волны – на рис. 3 (а и б). Штриховые кривые 1 соответствуют волновому числу  $\zeta = 40$  ( $C_{p1}/V_S = 0.8146$ ,  $C_{p2}/V_S = 0.8179$ ), сплошные кривые 2 –  $\zeta = 100$  ( $C_{p1}/V_S = 0.8154$ ,  $C_{p2}/V_S = 0.8162$ ). Согласно приведенным данным первой нормальной волне соответствует волна типа Стоунли, локализованная вблизи внешней поверхности цилиндра. Второй волне – локализованная вблизи внутренней поверхности цилиндра. Уменьшение толщины цилиндра существенно отразилось на кинематических характеристиках незатухающих волн. При  $\zeta = 40$  (штриховые кривые 1) наблюдается локализация волновых движений вблизи обеих поверхностей цилиндра. Однако для первой волны амплитуда перемещений вблизи внешней поверхности цилиндра значительно больше, чем вблизи внутренней поверхности. Для второй волны амплитуда перемещений вблизи внутренней поверхности цилиндра значительно больше чем вблизи внешней поверхности. Такое распределение перемещений по радиальной координате является естественным. С увеличением волнового числа кинематические характеристики незатухающих волн в трехслойных волноводах с  $r_1 = 0.3$  и  $r_1 = 0.7$  сближаются и при  $\zeta = 100$  (сплошные кривые 2) становятся весьма подобными.

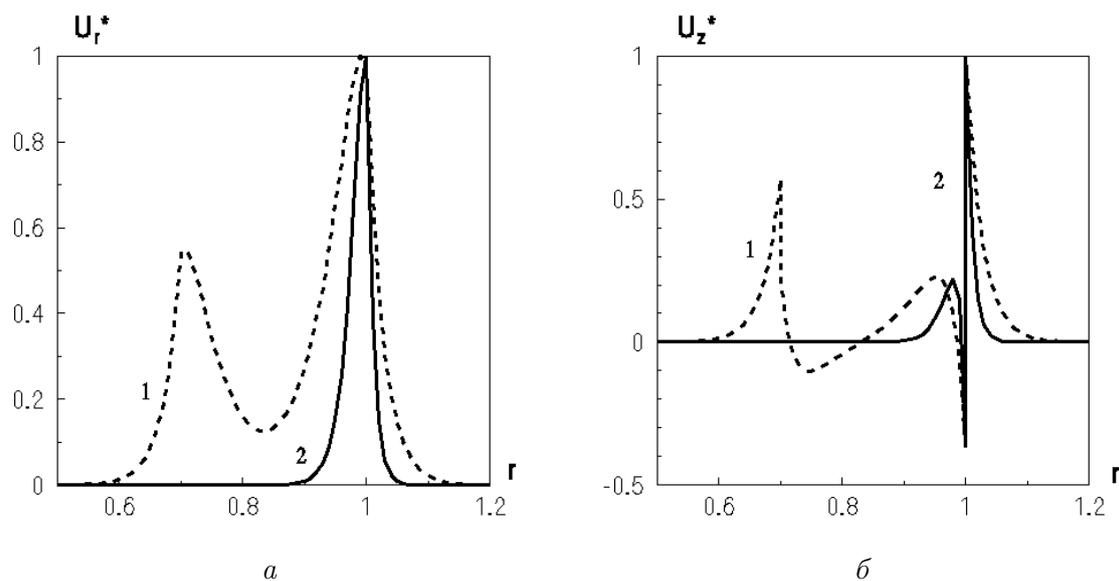


Рис. 2.

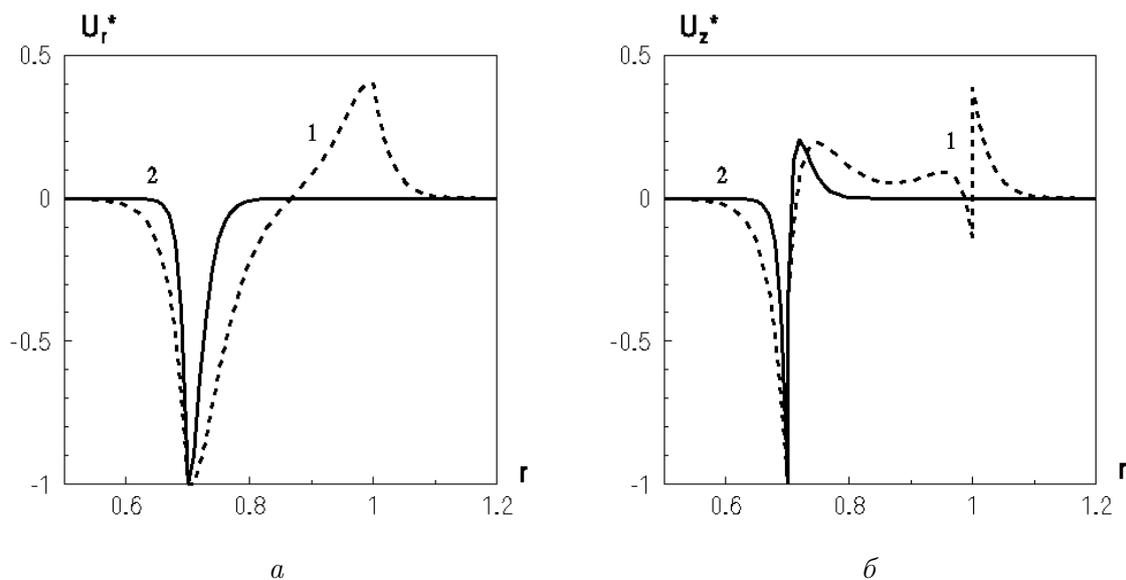


Рис. 3.

Как и в случае заполненного водой цилиндра из жесткой резины волновое возмущение, соответствующее поверхностной волне типа Стоунли, в равной степени захватывает жидкую и упругую составляющие волновода [8]. Отношение амплитуд осевых перемещений к радиальным немного больше единицы ( $u_{zr} = 1.03$  при  $\zeta = 100$  для первой волны). В случае жесткого материала цилиндра волновое возмущение для волны типа Стоунли практически полностью сосредоточено в жидкости.

Уменьшение толщины стенки цилиндра вызывает перераспределение потоков энергии между составляющими волновода. Для первой незатухающей волны трехслой-

ного волновода с  $r_1 = 0.7$  уменьшилось количество энергии, переносимой окружающей жидкостью, по сравнению с волноводом с  $r_1 = 0.3$  с 16.5% до 13.3% при  $\zeta = 40$ . При этом немного увеличилось количество энергии, переносимой упругим цилиндром, с 83.5% до 83.7%, а также жидким ядром до 3%. Для волновода с  $r_1 = 0.3$  практически вся энергии этой волны переносится упругим цилиндром и окружающей жидкостью. Для второй незатухающей волны наблюдается аналогичная ситуация. При  $\zeta = 40$  количество энергии, переносимой жидким ядром, уменьшилось с 18.4% при  $r_1 = 0.3$  до 14.5% при  $r_1 = 0.7$ . Увеличилось количество энергии, переносимой упругим цилиндром, с 81.6% до 82.4%, а также окружающей жидкостью до 3.1%. С увеличением волнового числа кинематические и энергетические характеристики волноводов с  $r_1 = 0.3$  и  $r_1 = 0.7$  сближаются и при  $\zeta = 100$  становятся весьма подобными. С уменьшением толщины стенки цилиндра отношение осевых перемещений к радиальным практически не изменилось для обеих волн.

Анализ кинематических и энергетических характеристик незатухающих волн, фазовая скорость которых с увеличением волнового числа стремится к скорости волны сдвига материала цилиндра, показал следующее. Волновое возмущение, соответствующее этим волнам, сосредоточено в упругом цилиндре. Соответственно практически вся энергия этой волны переносится упругим цилиндром. В жидкости (внутренней и внешней) волновое возмущение захватывает весьма узкую область вблизи поверхностей цилиндра. Радиальные перемещения являются преобладающими.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заполненном и окруженном жидкостью цилиндре учет излучения в окружающую жидкую среду порождает специальный механизм затухания волн, называемый радиационным демпфированием. В случае податливого материала цилиндра в таком трехслойном волноводе первые две нормальные волны неподвержены радиационному демпфированию во всей области частот. В заполненном и окруженном жидкостью цилиндре из податливого материала упруго-жидкостное взаимодействие проявляется практически во всей области частот и волновых чисел. Эффект взаимодействия, прежде всего, существенно изменяет асимптотические свойства фазовых скоростей нормальных волн. Фазовая скорость первых двух волн с увеличением волнового числа в пределе стремится к скорости волны Стоунли: первой волны – снизу, второй волны – сверху. Первая волна трансформируется в волну Стоунли вблизи внешней поверхности цилиндра, вторая волна – вблизи внутренней поверхности. В случае податливого материала цилиндра фазовая скорость волны Стоунли значительно меньше скорости звука в жидкости, в случае жесткого материала она практически равна скорости звука в жидкости.

В случае податливого материала цилиндра в этом трехслойном волноводе некоторые неоднородные волны с увеличением волнового числа трансформируются в волны, неподверженные радиационному демпфированию. Фазовая скорость этих волн с увеличением волнового числа стремится к скорости волны сдвига материала цилиндра. Волновое возмущение, соответствующее этим незатухающим волнам, практически сосредоточено в упругом цилиндре.

На конкретных примерах показано, что уменьшение жесткости материала цилиндра оказывает существенное влияние на кинематические и энергетические характеристики поверхностной волны типа Стоунли. В случае податливого материала ци-

цилиндра волновое возмущение, соответствующее волне Стоунли, в равной степени охватывает жидкую и упругую составляющие волновода. Естественно при этом значительную часть энергии переносит упругая составляющая волновода. Амплитуды осевых и радиальных перемещений становятся весьма близкими. В случае жесткого материала цилиндра волновое возмущение практически сосредоточено в жидкости, а амплитуды осевых смещений значительно превосходят амплитуды радиальных перемещений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Распространение волн в полном упругом цилиндре с жидкостью // Прикл. механика. – 1984. – **20**, N 1. – С. 21 – 26.
2. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Осесимметричные волны в упругом полном цилиндре, заполненном и окруженном жидкостью // Прикл. механика. – 1994. – **30**, N 9. – С. 15 – 23.
3. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Излучение точечного источника внутри упругого полого цилиндра, помещенного в акустическую среду. Свойства нормальных волн и направленность излучения // Прикл. механика. – 1998. – **34**, N 5. – С. 15 – 23.
4. *Комиссарова Г. Л.* Распространение нормальных осесимметричных волн в заполненных и окруженных жидкостью упругих цилиндрах из податливых материалов // Прикл. механика. – 2004. – **40**, N 5. – С. 104 – 113.
5. *Комиссарова Г. Л.* К решению задачи о распространении упругих волн в цилиндре с жидкостью // Прикл. механика. – 1990. – **26**, N 8. – С. 25 – 29.
6. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Особенности распространения волн в заполненных жидкостью цилиндрах с податливыми стенками // Акустичний вісник. – 2001. – **4**, N 3. – С. 22 – 33.
7. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Свойства поверхностных волн в упругом полном цилиндре // Акустичний вісник. – 2004. – **7**, N 3. – С. 39 – 48.
8. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Свойства локализованных вблизи границ волновых движений в заполненном жидкостью цилиндре // Акустичний вісник. – 2006. – **9**, N 2. – С. 37 – 55.