

РАСЧЕТ АКУСТИЧЕСКИХ КОНЦЕНТРАТОРОВ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННИХ ПОТЕРЬ

В.Г.Абакумов, д-р техн. наук, проф., К.А.Трапезон, асп-т

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”; Факультет Электроники, кафедра Звукотехники и регистрации информации

E-mail: rbhnh@i.com.ua; trapezon@ukr.net

The algorithm of calculation of basic descriptions of component ultrasonic thickeners is developed taking into account the antivibration features of both material and construction on the whole. Basic integral indexes are expected for the estimation of efficiency of thickener on the criterion of dispersion of energy. Correlations, allowing to formulate and decide the applied task upon settlement and planning of component thickeners both in the case of neglect of factor of internal dissipation of mechanical energy in material of thickener and at the account of the last, are resulted.

ВВЕДЕНИЕ

Для получения значительного усиления амплитуд колебаний при работе ультразвуковых систем необходимо использование в их составе концентраторов акустической энергии, основное назначение которых – повышение плотности ультразвуковой энергии в направлении распространения колебаний. Для того чтобы усиление обеспечивалось без увеличения мощности электромеханического преобразователя, к торцевому сечению последнего жестко крепится концентратор. Необходимо при проектировании концентратора заранее свести к минимуму неизбежные при эксплуатации внутренние потери механической энергии, обусловленные неупругим внутренним трением в материале. Внешние потери могут быть ограничены соответствующими технологическими приемами. Все эти вопросы не в последнюю очередь связаны с выбором закона изменения площади поперечного сечения $F(x)$ концентратора.

Обычно оценка усиления колебаний производится на основе решения задачи о свободных продольных колебаниях стержня со свободными концами [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

определяя его решение при помощи метода Фурье как $U(x,t) = X(x)\cos(\omega t)$, находят функцию перемещений $X(x)$ и после учета граничных условий вида $dX(0)/dx = dX(l) = 0$, рассчитывают собственные частоты ω . Тогда отношение $M = X(l)/X(0)$ определяет усиление колебаний концентратора изготовленного из материала с модулем упругости E , плотностью ρ имеющего резонансную длину l и резонансную частоту $f = \omega/2\pi$. Однако, даже в случае удачного задания площади поперечного сечения, при котором обеспечивается значение параметра $M > 1$, по такой методике, реальное усиление колебаний может отличаться от ожидаемого вследствие внутренних потерь энергии. Здесь и далее речь идет о внутренних потерях (рассеянии) энергии в материале концентратора. Пренебрежение этим фактором, кроме прочего может привести к снижению прочностных характеристик концентратора, резкому падению рабочих амплитуд устройства в режиме резонанса и, как следствие, к разрушению последнего.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На основе известных приемов и методов оценки поглощающих свойств материалов и элементов конструкций необходимо разработать алгоритм проектирования концентраторов с учетом внутреннего рассеяния энергии механических колебаний. На примере двух типов составных концентраторов, нового предлагаемого и известного, проверить его состоятельность с последующей количественной оценкой полученных результатов. Составные концентраторы типа “призма + переменная часть” широко применяются в качестве активных высокоамплитудных резонансных элементов ультразвуковой техники, поскольку позволяют в целом несколько уменьшить основные массогабаритные размеры при примерном сохранении ожидаемого усиления, характерного для переменной части [2,3].

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНЦЕНТРАТОРОВ

Рассмотрим решение задачи о продольных колебаниях для двух составных концентраторов К1 и К2, профили которых определяются по следующим законам. Функция $D(x)$, имеющая смысл поперечного диаметра определяется для К1 как:

$$D(x) = \begin{cases} a / \cos(mx), & x \in (0, \alpha) \\ b = \text{const} & x \in (\alpha, 1), \end{cases}$$

а для К2 функция $D(x)$ будет

$$D(x) = \begin{cases} a \cosh(m_1 x), & x \in (0, \alpha) \\ b = \text{const} & x \in (\alpha, 1), \end{cases}$$

где:

a, b, m, m_1 – постоянные, выбираемые исходя из требуемых присоединительных и габаритных размеров частей концентратора. Переменная x здесь и далее является относительной и изменяется вдоль длины l концентраторов от 0 до 1. Профиль К1 является новым типом, К2 – известным и широко применяемым на практике.

Для призматических частей обоих концентраторов и переменной части К2 решения уравнения (1) известны [4], а для переменной части К1 решение находим по методу из работы [5]. В итоге, после удовлетворения граничным условиям $W_1'(0) = W'(1) = 0$ и условиям сопряжения $W_1(\alpha) = W(\alpha)$; $W_1'(\alpha) = W'(\alpha)$ получим функции перемещений, их производные, уравнения частот и выражения для определения коэффициентов усиления.

Для К1:

$$\left. \begin{aligned} W(x) &= -c \frac{k \cos m\alpha \sin \lambda\alpha}{\sin k\beta} \cos k(x-1); \\ W'(x) &= k^2 c \frac{\cos m\alpha \sin \lambda\alpha}{\sin k\beta} \sin k(x-1); \\ W_1(x) &= c [m \sin mx \sin \lambda x + \lambda \cos mx \cos \lambda x]; \\ W_1'(x) &= -k^2 \cos mx [c \sin \lambda x]; \\ kctgk\beta + \lambda ctg\lambda\alpha + mtgma &= 0 \\ M &= -(\lambda / (k \cos(m\alpha))) \times (\sin(k\beta) / \sin(\lambda\alpha)); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $W(x)$ – решение для призмы; $W_1(x)$ – решение для переменной части; $\lambda = \sqrt{k^2 + m^2}$; $k = 2\pi f l \sqrt{\rho/E}$ – собственное (волновое) число; $\beta = 1 - \alpha$.

Для К2:

$$\left. \begin{aligned}
 W(x) &= \frac{B \cos \lambda_1 \alpha}{\cosh m_1 \alpha \cos k_1 \beta} \cos k_1(x-1); \\
 W'(x) &= -k_1 \frac{B \cos \lambda_1 \alpha}{\cosh m_1 \alpha \cos k_1 \beta} \sin k_1(x-1); \\
 W_1(x) &= \frac{B \cos \lambda_1 x}{\cosh m_1 x}; \\
 W_1'(x) &= \frac{-m_1 \sinh(m_1 x) [B \cos \lambda_1 x] - \cosh m_1 x [B \lambda \sin \lambda_1 x]}{(\cosh m_1 x)^2}; \\
 \lambda_1 \alpha \cdot \operatorname{tg} \lambda_1 \alpha + \left(\sqrt{(\lambda_1 \alpha)^2 + (m_1 \alpha)^2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{(\lambda_1 \alpha)^2 + (m_1 \alpha)^2}}{q} \right) + m_1 \alpha \tanh m_1 \alpha &= 0; \\
 M &= \cosh(m_1 \alpha) \frac{\cos \left(\frac{\sqrt{(\lambda_1 \alpha)^2 + (m_1 \alpha)^2}}{q} \right)}{\cos \lambda_1 \alpha};
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $W(x)$ – решение для призмы; $W_1(x)$ – решение для переменной части; $\lambda_1 = \sqrt{k_1^2 - m_1^2}$; $k_1 = 2\pi f l_1 \sqrt{\rho/E}$ – собственное (волновое) число; $\beta = 1 - \alpha$.

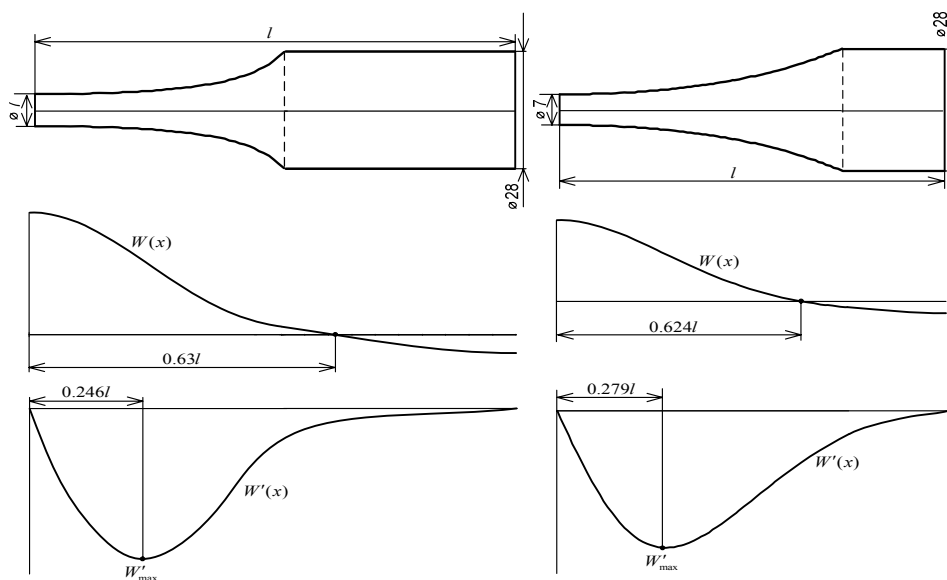


Рис.1

При помощи соотношений (2) и (3) построены профили концентраторов ос следующими параметрами: для К1 – $\alpha = 0.519$; $k = 4.246$; $m = 2.539$; $\lambda = 4.949$; для К2 – $\alpha = 0.75$; $k_1 = 3.728$; $m_1 = 2.751$; $\alpha/\beta = 3$; $\lambda_1 = 2.516$. Для обоих концентраторов коэффициенты $M = -7.663$ и $\delta = D(1)/D(0) = 4$ являются одинаковыми и принято, что $D(0) = 7$ мм, $D(1) = 28$ мм. Конфигурация и характерные размеры К1 и К2, рассчитанные для работы на частоте 11 кГц приведены на рис.1 – слева К1, справа К2. При этом их длины в зависимости от типа материала определяются по формуле $l = (k/2\pi f) \times \sqrt{E/\rho}$ и равны: К1 – $l = 306,41$ мм (титановый сплав ВТ3-1) и $l = 310,57$ мм (сталь 45); К2 – $l = 269,03$ мм (ВТ3-1) и $l = 272,68$ мм (сталь 45). На рисунке 1 также показаны соответствующие графики перемещений $W(x)$ и деформаций $W'(x)$.

2.МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ВНУТРЕННЕГО РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ В КОНЦЕНТРАТОРЕ

Существующее математическое описание рассеяния энергии в конструкционном материале сводится к некоторым нелинейным зависимостям механического напряжения σ от относительной деформации ε , отличных от зависимости $\sigma = E\varepsilon$ (закон Гука), которые соответствуют режиму высоких амплитуд. Установление зависимости $\sigma(\varepsilon)$, описывающей при циклическом деформировании форму замкнутой петли гистерезиса, выражает соответствующую физическую гипотезу рассеяния энергии. Наиболее физически обоснованными на сегодня следует признать гипотезы Е.С.Сорокина и Н.Н. Давиденкова [6,7]. Последняя характеризует зависимость между механическими напряжениями и относительными деформациями следующим образом

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \pm \frac{E\eta}{n} \left[2^{n-1} \varepsilon_0^n - (\varepsilon_0 \pm \varepsilon)^n \right], \quad (4)$$

где

η, n – геометрические параметры петли гистерезиса, которые определяются для каждого из материалов на основе зависимости логарифмического декремента затухания δ и наблюдаемых механических напряжений σ ; ε_0 – амплитудное значение деформации.

Проинтегрировав соотношение (4) по контуру петли, легко найти ее площадь, т.е. энергию рассеивания ΔW_0 в единице объема материала за цикл деформирования:

$$\Delta W_0 = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} (\sigma^+) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_0}^{-\varepsilon_0} (\sigma^-) d\varepsilon = \eta N E \varepsilon_0^{n+1} = \beta \varepsilon_0^{n+1} \quad \left[N = (2^{n+1}(n-1))/(n(n+1)), \beta = \eta E N \right]. \quad (5)$$

Выражение для потенциальной энергии W_0 , накапливаемой в единице объема материала концентратора

$$W_0 = E \varepsilon_0^2 / 2 \quad (6)$$

при амплитуде деформирования ε_0 можно определить значение коэффициента поглощения в единице объема материала

$$\psi_0 = \Delta W_0 / W_0 = 2\delta = 2N\eta\varepsilon_0^{n-1}. \quad (7)$$

Соотношения (5)-(7) относятся к описанию свойств материала стержня. Для определения величины рассеиваемой энергии за цикл колебаний концентратора длиной l , площадью поперечного сечения $F(x)$ при форме перемещений резонансных колебаний $A \cdot X(x)$ (A – амплитудный коэффициент) необходимо вычислить интеграл элементарной энергии рассеивания по всему объему концентратора V . Зная, что $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0 = A \cdot X'(x)$, получим

$$\Delta W = \int_V \Delta W_0 dV = \beta \int_0^l \varepsilon_0^{n+1} F(x) dx = \beta(A)^{n+1} \int_0^l (X'(x))^{n+1} F(x) dx. \quad (8)$$

$$W = \int_V W_0 dV = \int_0^l \frac{E \varepsilon_0^2}{2} F(x) dx = \frac{EA^2}{2} \int_0^l (X'(x))^2 F(x) dx. \quad (9)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ

Выражения (8) и (9) дают возможность сравнить разные типы концентраторов лишь качественно, по значению потребляемой и рассеиваемой энергий при условии, что они обладают близкими значениями коэффициента усиления M .

Для установления количественной связи между ΔW и амплитудами колебаний необходимо дополнительно рассмотреть задачу о вынужденных колебаниях стержня с учетом рассеяния энергии, под действием периодической внешней силы вида $p(x) \sin vt$, которая носит гармонический характер. Алгоритм получения волнового уравнения подробно рассмотрен в работе [8]. При этом был использован энергетический метод, по которому зависимость гипотезы Давиденкова заменяется другой зависимостью для описания петли гистерезиса, но так, чтобы ее площадь совпала с выражением (5), то есть, обеспечив тем самым их энергетическую эквивалентность [9]. Чаще всего для обозначенной замены используется выражение по обобщенной гипотезе Е.С.Сорокина [10], которое учитывает указанное выше предложение Н.Н. Давиденкова [11]:

$$\sigma = \varepsilon E \pm \beta_1 \varepsilon_0^n \times \left(\sqrt{1 - (\varepsilon / \varepsilon_0)^2} \right).$$

Само условие энергетической эквивалентности имеет вид: $\beta_1 = \beta / \pi = (\eta E \cdot 2^{n+1} \cdot (n-1)) / (\pi n \cdot (n+1))$. Тогда волновое уравнение, учитывающее влияние рассеивания на процесс колебаний:

$$\ddot{y} + \omega^2 y \mp \frac{q}{m} \beta_1 y_0^n \sqrt{1 - \frac{y^2}{y_0^2}} = \frac{P^*}{m} \sin vt, \quad (10)$$

где $U(x, t) = X(x)y(t)$; y_0 – максимальное значение амплитуды $y(t)$ при $t = 0$; ω^2 – квадрат собственной (резонансной) частоты системы; m – приведенная масса системы; параметры $q = \int_0^l (X')^{n+1} F dx$ и $P^* = -\int_0^l p(x) X dx$ характеризуют соответственно работу сил демпфирования и внешних сил. Уравнение (10) имеет частное решение $y = y_0 \sin(vt - \gamma)$ (γ – фазовый угол) в случае, если $y_0 = P^* / \sqrt{c^2 (1 - (v/\omega)^2)^2 + (q\beta_1 y_0^{n-1})^2}$ и $\text{tg} \gamma = -(q\beta_1 y_0^{n-1}) / (m(\omega^2 - v^2))$. В режиме резонанса когда $\omega = v$, получим $\gamma = 3\pi/2$ и поэтому $y = y_0 \cos(\omega t)$, а величина резонансной амплитуды будет $y_0^n = (\pi P^*) / (q\beta)$. Откуда с учетом (8) можно найти, что $y_0 = A \cdot \sqrt{P^* / \Delta W}$. Откуда соотношение для количественной оценки резонансных амплитуд при сравнении двух концентраторов из различных материалов или изготовленных из одного и того же материала, имеющих примерно одинаковое усиление, которое рассчитано по линейной теории имеет вид:

$$(y_{01} / A)^{n_1} / (y_{02} / A)^{n_2} = (\Delta W_2) / (\Delta W_1), \quad (11)$$

где индексы 1 и 2 относятся к параметрам первого и второго сравниваемых концентраторов.

Для концентраторов К1 и К2 были определены значения интегральных параметров W , ΔW , ψ учитывая, что предельно допустимые значения амплитуд X_0 по абсолютному значению для К1 – $[X_0]=0.349$ мм для ВТЗ-1 и $[X_0]=0.154$ мм для стали 45; для К2 – $[X_0]=0.373$ мм для сплава ВТЗ-1 и $[X_0]=0.165$ мм для стали 45. Для расчета также были использованы справочные данные, по которым найдены параметры петли гистерезиса для сплава ВТЗ-1 и стали 45 соответственно: ($n=1.25$; $\eta=0.025$) и ($n=1.75$; $\eta=1.6$).

При выборе лучшего из двух титановых концентраторов К1 и К2 сразу можно отметить о некотором преимуществе К2 по критерию предельной амплитуды перемещений $[X_0]$ (отношение $[X_0]_2/[X_0]_1=0.373/0.349=1.068$), что однако нельзя сказать о весе этих концентраторов (отношение $V_1/V_2=108.4/74.38=1.45$). Сравнение энергетических показателей при амплитуде $X_0=0.349$ мм, являющейся предельной для составного концентратора К1. Тогда можно определить, что: $W_1=476.509 \cdot 10^{-2}$ Дж, $\Delta W_1=2.043 \cdot 10^{-2}$ Дж, $(\Delta W/W)_1=4.286 \cdot 10^{-3}$; $W_2=507.337 \cdot 10^{-2}$ Дж, $\Delta W_2=2.251 \cdot 10^{-2}$ Дж, $(\Delta W/W)_2=4.436 \cdot 10^{-3}$. Как видим, при использовании титанового сплава ВТЗ-1 потребляемая энергия К2 выше в 1.06 раза, а рассеиваемая – в 1.1 раз по сравнению с К1. Согласно выражению (11) при $n_1=n_2=1.25$ получим $(y_{01})^T/(y_{02})^T=1.081$.

Таким образом, по энергетическому критерию концентратор К1 лучше чем К2, и следовательно его реальное усиление колебаний будет выше чем при использовании модели К2.

ВЫВОДЫ

Предложены две математические модели концентраторов перемещений, для которых найдены основные параметры, по которым проводят анализ на эффективность и работоспособность последних.

Приведен алгоритм, по которому найдены основные интегральные характеристики учета внутреннего рассеивания энергии при работе составных концентраторов. Показана количественная оценка этих показателей для предлагаемых экспериментальных образцов.

Исследован предельный режим работы предлагаемых концентраторов и найдено подтверждение тезиса о влиянии геометрии концентраторов на значение потребляемой энергии и энергии рассеивания при работе последних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1970. – 412 с.
2. Писаревский М. М. Расчет переходных стержней для магнитострикционных вибраторов. – В кн.: Тр. науч.-техн. совещ. по изуч. рассеяния энергии при колебаниях упругих тел. Киев: Изд-во АН УССР, 1958. с.54-89.
3. Мечетнер Б.Х. Концентраторы-инструменты для ультразвуковой обработки, способы их крепления. – М.: ГОСИНТИ, 1965. – 54 с.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
5. Трапезон К.А. Метод симметрий при расчете и проектировании акустических концентраторов // Акустичний вісник. – 2006. – Т.9, №4. – С.50-55.
6. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971. – 376 с.
7. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // ЖТФ. – 1938. – Т. 8, №6. – С.15-21.
8. Абакумов В.Г., Трапезон К.А. О проектировании акустических концентраторов с учетом внутреннего рассеяния энергии // Акустичний вісник. – 2007. – Т.10, №1. – С.3-16.
9. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 196 с.
10. Сорокин Е.С. Замкнутое решение задачи о вынужденных колебаниях стержней с гистерезисом // Исследования по теории сооружений. – 1949. – №4. – С. 34-38.
11. Пановко Я.Г. Об учете гистерезисных потерь в задачах прикладной теории упругих колебаний // ЖТФ. – 1953. – Т. 23, №3. – С. 23-29.