## ГИПЕРХАОС В ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ "ГЕНЕРАТОР – ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ"

## А.Ю. ШВЕЦ

HTУУ "Киевский политехнический институт" e-mail: shvets@imath.kiev.ua

Одним из важнейших составных элементов современного навигационного оборудования являются пьезокерамические излучатели. Различные типы таких излучателей широко используются в глубиномерах, дальномерах, устройствах для сканирования подводного пространства, системах передачи и приема информации под водой. В последнее время в качестве устройства для возбуждения колебаний пьезокерамического излучателя вновь стали применяться электроламповые LC-генераторы. Это связано с тем ренессансом, который переживают аналоговые ламповые генераторы, позволяющие обеспечить значительно более высокие метрологические характеристики выходных сигналов по сравнению с цифровыми устройствами.

Возникновение хаотических режимов взаимодействия в детерминированной нелинейной колебательной системе состоящей из двух подсистем – электролампового *LC*-генератора, ограниченной мощности, и пьезокерамического излучателя, впервые было установлено в работах [1, 2]. В этих работах показано, что возникновение в системе детерминированного хаоса возможно за счет взаимодействия между излучателем и генератором, а не автономными свойствами каждой подсистемы в отдельности. Целью настоящей работы является развитие и углубление ранее проведенных исследований по изучению хаотической динамики системы "генератор-излучатель".

Рассмотрим систему, состоящую из пьезокерамического излучателя, источником возбуждения которого является электроламповый LC-генератор. Предположим, что пьезокерамический излучатель имеет форму кругового цилиндра и помещен в акустическую среду. Обозначим через 2h длину цилиндра, а через S – площадь его поперечного сечения. Излучатель и генератор через передающий трансформатор образуют электрический контур. Пусть,  $e_g$  и  $E_g$ , соответственно, переменная и постоянная составляющие сеточного напряжения лампы генератора. Обозначим через V(t) электрическое напряжение, приложенное к электродам излучателя. Введем переменную  $\psi(t)$  по формуле

$$\psi(t) = \int_0^t (e_g + E_g) dt$$

Тогда, уравнение, описывающее электрические колебания генератора имеет вид [1, 3]:

$$\ddot{\psi}(t) + \omega_0^2 \psi(t) = a_1 \dot{\psi}(t) + a_2 \dot{\psi}^2(t) - a_3 \dot{\psi}^3(t) - a_4 V(t), \tag{1}$$

здесь  $\omega_0$  – собственная частота генератора;

$$\omega_0^2 = \frac{R_a + R_c}{R_c L_c C_c}; \ a_0 = a_1 - \frac{M^2 R_c}{L_c C_c L R_a^2}; \ a_2 = \frac{3 M_c I_3 E_g}{L_c C_c}; a_3 = \frac{M_c I_3}{L_c C_c};$$

$$a_4 = \frac{2MM_c}{LR_aL_cC_c}; a_1 = \frac{M_c}{L_cC_c} (I_1 - \frac{R_aR_cC_c - L_c}{R_a(M_c - DL_c)} + \frac{R_cL_1}{R_a^2M_c} - 3I_3E_g^2)$$
 (2)

Подробное описание всех электромагнитных параметров генератора, входящих в формулы (2), приведено в работе [1].

В свою очередь, уравнение, описывающее колебания напряжения V(t) можно записать в виде [1]:

$$\ddot{V}(t) + \omega_1^2 V(t) = a_5 \psi(t) + a_6 \dot{\psi}(t) - a_7 \dot{V}(t), \tag{3}$$

здесь  $\omega_1$  – собственная частота излучателя;

$$\omega_1^2 = \frac{2h}{LS\epsilon_{33}(1-k^2)}; \ a_5 = -\frac{M\omega_1^2 R_c(R_a + R_c)}{2M_c R_a L_c}; \ a_6 = -\frac{M\omega_1^2 R_c}{2M_c R_a};$$
$$a_7 = \frac{k^2}{\eta_0 hS(1-k^2)}; \ k = \frac{d_{33}}{\sqrt{\epsilon_{33}s_{33}}}$$

Параметры  $d_{33}$ ,  $s_{33}$  и  $\epsilon_{33}$  это постоянные коэффициенты теории продольных деформаций пьзоэлемента, описанные в [3].

Таким образом система уравнений четвертого порядка (1, 3) описывает процесс взаимодействия пьезокерамического излучателя с источником его возбуждения, электроламповым LC-генератором. Перейдем в системе уравнений (1), (3) к новым безразмерным переменным по следующим формулам:

$$\xi(\tau) = \frac{\psi(\tau)\omega_0}{E_g}, \ \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \zeta(\tau), \ \beta(\tau) = \frac{V(\tau)}{E_g}$$
$$\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} = \gamma(\tau), \ \tau = \omega_0 t. \tag{4}$$

Тогда получим следующую систему уравнений

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \zeta(\tau),$$

$$\frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} = -\xi(\tau) + \alpha_1 \zeta(\tau) + \alpha_2 \zeta^2(\tau) - \alpha_3 \zeta^3(\tau) - \alpha_4 \beta(\tau),$$

$$\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} = \gamma(\tau),$$

$$\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} = -\alpha_0 \beta(\tau) + \alpha_5 \xi(\tau) + \alpha_6 \zeta(\tau) - \alpha_7 \gamma(\tau),$$
(5)

где

$$\alpha_0 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}, \ \alpha_1 = \frac{a_0}{\omega_0}, \ \alpha_2 = \frac{a_2 E_g}{\omega_0}, \ \alpha_3 = \frac{a_3 E_g^2}{\omega_0},$$

$$\alpha_4 = \frac{a_4}{\omega_0}, \ \alpha_5 = \frac{a_5}{\omega_0^3}, \ \alpha_6 = \frac{a_6}{\omega_0^2}, \ \alpha_7 = \frac{a_7}{\omega_0}, \ . \tag{6}$$

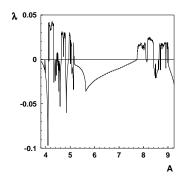
Функция  $\beta(\tau)$  соответствует сигналу распространяемому излучателем в акустическую среду, а функция  $\xi(\tau)$  описывает внутренние процессы, протекающие в генераторе.

Система (5) является нелинейной системой дифференциальных уравнений четвертого порядка, поэтому ее исследование проведено при помощи различных численных методов. В пространстве параметров этой системы был проведен большой цикл компьютерных расчетов целью которых было обнаружение хаотических аттракторов их детальное описание, а также изучение сценариев перехода от регулярных режимов к хаотическим. Детальное описание методики проведения численных экспериментов приведено в работе [4]. Для проведения численных экспериментов были выбраны следующие значения параметров системы уравнений (5):

$$\alpha_0 = 0.995, \ \alpha_1 = 0.0535, \ \alpha_2 = 0.63A, \ \alpha_3 = 0.21A, \ \alpha_4 = 0.103,$$

$$\alpha_5 = -0.0604, \ \alpha_6 = -0.12, \ \alpha_7 = 0.01.$$
(7)

В качестве бифуркационного параметра рассматривался параметр A, который является мультипараметром, так как изменение значения A может соответствовать изменению пяти параметров генератора. Значения величин (7) взяты из работы [1] и соответствуют характеристикам реальных электроламповых LC-генераторов и пьезокерамических излучателей.



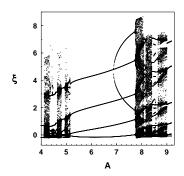
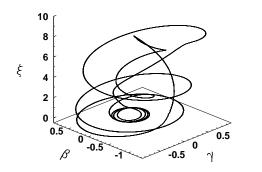


Рис.1

На рис.1 приведена зависимость старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя аттракторов системы от значений параметра A. Как известно, наличие в спектре ляпуновских характеристических показателей хотя бы одного положительного показателя является основным практическим критерием хаотичности аттрактора динамической системы [5, 6]. Как видно из рис.1 существует ряд интервалов по горизонтальной координатной оси в которых система (5) имеет положительный ляпуновский показатель. Во всех этих областях в системе существуют хаотические аттракторы. Точки пересечения этого графика с горизонтальной координатной осью соответствуют бифуркационным значениям параметра A. Более детальное изучение зависимости, приведенной на рис.1, позволяет обнаружить скейлинг ляпуновских показателей. На рис.2 приведена фазопараметрическая характеристика системы, так называемое бифуркационное дерево. Эта характеристика построена относительно координаты  $\xi$ . Фазопараметрические характеристики, построенные относительно других координат системы, качественно подобны приведенной на рис.2. Светлым участкам

"кроны" этого дерева соответствуют периодические режимы установившихся колебаний системы (5), а густо затемненным — хаотические. Четко видны точки бифуркации при прохождении которых происходит смена регулярного, периодического, режима на нерегулярный, хаотический.

Далее остановимся на некоторых типах хаотических аттракторов, которые существуют в системе. При 8.41 < A < 8.63 в системе существует устойчивый предельный цикл. Проекция фазового портрета этого цикла приведена на рис.3. При значении A=8.405 предельный цикл исчезает в результате касательной бифуркации и в системе рождается хаотический аттрактор, проекция фазового портрета которого, построенная при значении A=8.25 приведена на рис.4. Переход от регулярного аттрактора к хао-



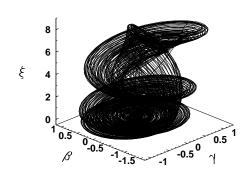
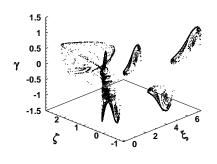


Рис.3

тическому осуществляется через перемежаемость первого типа по Помо-Манневиллю [7]. Ламинарной фазой этой перемежаемости является движение в окрестности исчезнувшего в результате касательной бифуркации многооборотного предельного цикла, а турбулентной — непредсказуемые наперед блуждания вокруг витков цикла.

На рис.5 приведена проекция сечения Пуанкаре, плоскостью  $\beta=0$ , данного хаотического аттрактора, а на рис.6 одна из проекций отображения Пуанкаре. Сечение Пуанкаре этого аттрактора представляет собой некоторое стохастическое множество точек, число которых увеличивается с течением времени. Вид отображения Пуанкаре показывает, что система (5) может быть, правда достаточно грубо, аппроксимирована при помощи одномерного отображения, что существенно упростит ее исследование. Вид этого отображения, которое может быть заменено набором одномерных параболических и подковообразных линий является еще одним доказательством того, что система (5) находится в хаотическом режиме [5].

На рис.7 построено распределение инвариантной меры Крылова—Боголюбова по фазовому портрету исследуемого хаотического аттрактора. Эта мера является количественной характеристикой времени пребывания изображающей точки траекторий аттрактора в заданной области фазового объема. Более темные части рис.7 соответствуют



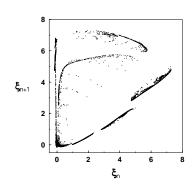
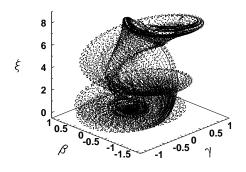


Рис.5

областям в которых изображающая точка траекторий проводит большую часть времени. Как видно из рис.7 наибольшую часть времени траектории проводят в окрестности исчезнувшего предельного цикла, что является свидетельством большей длительности ламинарных фаз по сравнению с турбулентными. Кроме того, этот рисунок является еще одним подтверждением реализации сценария перемежаемости при переходе от регулярного режима к хаотическому.



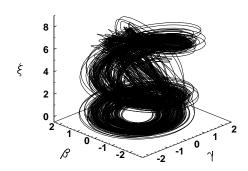
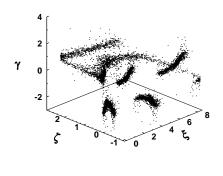


Рис.7

При значении A=7.789 в системе происходит чрезвычайно интересная бифуркация типа "хаос-хаос", когда в результате сложных механизмов взаимодействия хаотического аттрактора с седловыми предельными циклами, существующими в бассейне его притяжения, в системе возникает, так называемый, гиперхаотический аттрактор. Аттракторы такого типа для четырехмерных систем, определяются наличием в спектре ляпуновских характеристических показателей двух положительных показателей.

Проекции фазового портрета гиперхаотического аттрактора, его сечение и одно из отображений Пуанкаре приведены, соответственно, на рис.8–10. По сравнению с раннее рассмотренным хаотическим аттрактором, сечение Пуанкаре гиперхаотического аттрактора утрачивает квазиленточную структуру. Вид отображения Пуанкаре свидетельствует о невозможности одномерной аппроксимации в случае гиперхаоса.



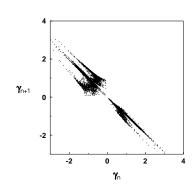


Рис.9

Рис.10

В заключение подчеркием, что в системе (5) обнаружены хаотические аттракторы отличные от выше рассмотренных. Во всех случаях основной причиной возникновения детерминированного хаоса в динамической системе "генератор-излучатель" является взаимодействие между подсистемами, а не их автономные свойства.

## ЛІТЕРАТУРА

- 1. Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaos in vibrating systems with a limited power-supply. // Chaos. − 1993. − 3, № 3. − P. 387–395.
- 2. Швец А.Ю. *Хаотические режимы взаимодействия в детерминированной системе* "генератор—пьезокерамический излучатель" // Вопросы аналитической механики и ее применений.— Киев: Ин-т математики, 1999.— С. 407–419.
- 3. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids.—New York: Wiley, 1973.—511 p.
- 4. Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // J. Fliuds & Structures. − 1994. − 8, № 1. − P. 1−18.
- 5. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 295 с.
- 6. Анищенко В.С., Астахов В.В. и др. *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах.* Москва—Ижевск.— 2003.— 530 с.
- 7. Berge P., Pomeau Y., Vidal C.H. Order within chaos.—New York: John Wiley and Sons, 1984.—440 p.