ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ.

А.Ю. ШАМАРИН

Киевский государственный научно-исследовательский институт гидроприборов

г. Киев, ул. Сурикова, 3

ВСТУПЛЕНИЕ.

При решении прикладных задач гидроакустики, возникает вопрос исследования динамических процессов в определенной гидроэлектроупругой системе, в том числе и взаимодействие плоской звуковой волны с цилиндрической решеткой, образованной из пьезокерамических цилиндрических преобразователей и акустического экрана.

В данной работе исследуются физические характеристики полей системы состоящей в общем случае из произвольного числа погруженных в акустическую среду тонкостенных цилиндрических пьезопреобразователей, оси которых являются образующими некоторой воображаемой цилиндрической поверхности. Внутри решетки находится еще одна, не перемешивающаяся с внешней, акустическая среда, которая заполняет цилиндрический объем.

Система возбуждается установившейся во времени плоской волной давления.

Преобразователи поляризованы в радиальном направлении и могут иметь закороченные, разомкнутые и замкнутые через нагрузочное сопротивление электроды.

Иными словами имеется круговая антенная решетка внутри, которой находится экран произвольной акустической жесткости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается система погруженных в безграничное пространство жидкости тонкостенных пьезопреобразователей, оси которых равноудалены на расстояние L от точки O (рис.1), т.е. преобразователей, образующих круговую антенную решетку. Число электроупругих цилиндров, их геометрические размеры и расположение, в общем случае произвольны.

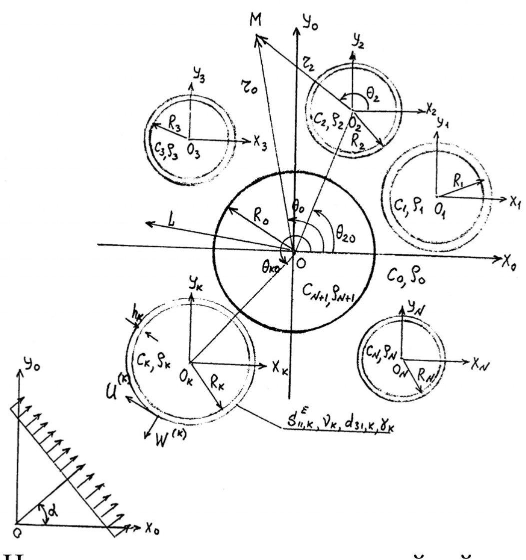

Рис. 1. Нормальное сечение криволинейной системы.

Внутри антенной решетки находится акустический экран в виде некоторого цилиндрического объема, ось которого проходит через точку О. Среды, заполняющие указанный цилиндрический объем и безграничное внешнее пространство, имеют разные физические параметры и не перемешиваются.

Преобразователи являются бесконечно длинными, тонкостенными, имеют радиальную поляризацию и могут содержать жидкость во внутренних объемах.

Гидроэлектроупругая система возбуждается плоской волной давления с периодическим законом изменения во времени.

Излучаемый динамический процесс моделируется в предположении, что для описания движения элементов антенной решетки оправдано привлечение теории тонких пьезокерамических оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, а жидких сред – акустической теории.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Введем полярные координаты r_k, θ_k (рис.1), связанные с каждой из электроупругих оболочек (k=1,2,…N, где N – число оболочек) и акустическим цилиндром (k=0).

С учетом сделанных допущений, задача состоит в совместном интегрировании уравнений динамики оболочек и возмущенного движения акустических сред

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\beta_k^2\mu_k\right)\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial\theta_k^2}+\frac{\partial W^{(k)}}{\partial\theta_k}-\beta_k^2\mu_k\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial\theta_k^3}-\frac{R_k^2}{c_{pk}^2}\frac{\partial^2 U^{9k0}}{\partial t^2}=0\\
&\frac{\partial U^{(k)}}{\partial\theta_k}-\beta_k^2\mu_k\frac{\partial^3 U^{(k)}}{\partial\theta_k^3}+W^{(k)}+\beta_k^2\mu_k\frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial\theta_k^4}-R_k\left(1+\nu_k\right)d_{31k}t_2^{(k)}+\\
&+\frac{R_k}{c_{pk}^2}\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial t^2}=\frac{S_{11k}^E\left(1-\nu_k^2\right)R_k^2}{h_k}q^{(k)}\qquad (k=1,2,...,\ N)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial r_i^2}+\frac{1}{r_i}\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r_i}+\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial\theta_i^2}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial r_i^2}+\frac{1}{r_i}\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r_i}+\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial\theta_i^2}=\frac{1}{c_i^2}\frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial^2\varphi^{(N+1)}}{\partial r_0^2}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial\varphi^{(N+1)}}{\partial r_0}+\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2\varphi^{(N+1)}}{\partial\theta_0^2}=\frac{1}{c_{N+1}^2}\frac{\partial^2\varphi^{(N+1)}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
q^{(k)}=\left[-P^{(0)}+P^{(k)}\right]_{k=R_k}\qquad (k=1,2,...,N)
\tag{3}
$$

$$
P^{(0)}=-\rho_0\frac{\partial\left[\varphi^{(0)}+\phi\right]}{\partial t};\quad P^{(i)}=-\rho_i\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial t}\quad i=1,2,...,N)
\tag{4}
$$

Здесь $U^{(k)}$, $W^{(k)}$ – тангенциальная и нормальная составляющие вектора перемещений k-ой оболочки; $q^{(k)}$ – действующая на нее акустическая нагрузка; $E^{(k)}$ – напряженность электрического поля; β_k, μ_k, c_{pk} – постоянные, которые выражаются через параметры k-ой оболочки: модули упругости S^E_{11k} и ν_k, пьезомодуль d_{31}, плотность материала γ_k, а также ее толщину h_kи радиус R_k; $\varphi^{(i)}$ – потенциал скоростей акустических сред, заполняющих безграничное внешнее пространство (i=0), внутренний объем i-ой (i=1,2,…,N) оболочки и цилиндрический объем, содержащийся внутри антенной решетки (i=N+1); $P^{(i)}$ – соответствующее акустическое давление; c_i, ρ_i – физические параметры (скорость звука и плотность) акустической среды; t – время.

Граничными для сформулированной задачи являются условия непроникания в местах контакта пьезопреобразователей и акустических сред, а также среды, заполняющей безграничное внешнее пространство, с акустическим экраном

$$\left.\frac{\partial\left[\varphi^{(0)}+\phi\right]}{\partial r_0}\right|_{r_0=R_0}=\left.\frac{\partial\varphi^{(N+1)}}{\partial r_0}\right|_{r_0=R_0};\quad \rho_0\left.\frac{\partial\left[\varphi^{(0)}+\phi\right]}{\partial t}\right|_{r_0=R_0}=\rho_{N+1}\left.\frac{\partial\varphi^{(N+1)}}{\partial t}\right|_{r_0=R_0} \tag{5}$$

Для установившихся во времени процессов необходимо выполнение условия Зоммерфельда для потенциала скоростей отраженных и излученных волн $\varphi^{(0)}$. Кроме того, учитывая, что в замкнутых объемах ($r_i<R_i$, $i=1,2,\ldots,N+1$) нет источников, потенциалы скоростей $\varphi^{(i)}$, описывающие возникающие в них возмущения, должны быть ограничены.

Падающая плоская волна давления, распространяющаяся под углом α к оси 0_kX_k декартовых координат (рис.1), задается функцией ϕ, которая в переменных r_k, θ_k ($k=1,2,\ldots N$) и r_0, θ_0 имеет вид

$$\begin{aligned}\phi\left(r_k,\theta_k,t\right)&=Qe^{-i\omega t+i\frac{\omega}{c_o}\left[L\cos\left(\theta_{k0}-\alpha\right)+r_k\cos\left(\theta_k-\alpha\right)\right]}\\ \phi\left(r_o,\theta_0,t\right)&=Qe^{-i\omega t+i\frac{\omega}{c_o}r_0\cos\left(\theta_k-\alpha\right)}\end{aligned} \tag{6}$$

В приведенных выражениях Q – амплитуда действующей нагрузки, θ_{k0} – угловая координата O_k в центральной системе координат (r_0, θ_0).

Решая задачу методом разделения пространственных переменных, получим для искомых величин их представление в рядах по собственным формам колебаний (ряды Фурье)

$$\begin{aligned}W^{(k)}&=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}W_n^{(k)}e^{in\theta_k}\\ U^{(k)}&=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_n^{(k)}e^{in\theta_k}\quad(k=1,2,\ldots N)\end{aligned} \tag{7}$$

$$\varphi^{(0)}=e^{-i\omega t}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_{nk}^{(0)}\left(r_k\right)e^{in\theta_k} \tag{8}$$

$$\varphi^{(k)}=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n^{(i)}\left(r_k\right)e^{in\theta_k} \tag{9}$$

$$\varphi^{(N+1)}=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n^{(N+1)}\left(r_0\right)e^{in\theta_0} \tag{10}$$

Здесь компоненты потенциала скоростей $\varphi^{(0)}$ описывают возмущения во внешнем пространстве, обусловленные пьезокерамическими оболочками ($k=1,2,\ldots N$) и акустическим экраном (k=)0.

Функции $\varphi_{nk}^{(0)}$, $\varphi_n^{(i)}$, $\varphi_n^{(N+1)}$ удовлетворяют уравнению Бесселя, что следует в результате подстановки выражений (8)–(10) в формулу (2). Тогда, с учетом условий излучения Зоммерфельда для возмущений в безграничном пространстве и их ограниченности в замкнутых объемах $r_i<R_i$ ($i=0,1,\ldots N$), общие решения волновых уравнений (2) имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)}&=e^{-i\omega t}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n^{(0)}H_n^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r_k\right)e^{in\theta_k}\\ \varphi^{(k)}&=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n^{(k)}J_n\left(\frac{\omega}{c_k}r_k\right)e^{in\theta_k}\qquad(k=1,2,\ldots.N)\\ \varphi^{(N+1)}&=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n^{(N+1)}J_n\left(\frac{\omega}{c_{N+1}}r_0\right)e^{in\theta_0},\end{aligned} \tag{11}$$

где $H_n^{(1)}$, J_n – функции n-х порядков Ханкеля первого рода и Бесселя, $A_n^{(0)}$, $B_n^{(k)}$, $B_n^{(N+1)}$ – постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий.

Используя теорему сложения для функции $H_n^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r_j\right)$, выполним переразложение потенциала скоростей $\varphi^{(0)}$, представив его в переменных каждой из координатных систем r_k, θ_k (k=0,1,…N):

$$\varphi^{(0)}(r_k,\theta_k) = e^{-i\omega t}\sum_{n=\infty}^{\infty}\left\{A_n^{(k)}H_n^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}r_k\right) + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N}{}' \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)}H_{m-n}^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0}L_{kj}\right)J_n\left(\frac{\omega}{c_0}r_k\right)e^{i(m-n)\theta_{kj}}\right\}e^{in\theta_k} \qquad (12)$$

Штрих над сумой означает, что слагаемое j=k отсутствует.

В выражении (12) θ_{kj}, L_{kj} – угловая и радиальная координаты центра к-ой полярной системы $O_к$ в переменных j–ой системы (r_j,θ_j).

Разложение потенциала падающей волны ϕ (6) в ряд Фурье в принятых координатных системах имеет вид:

$$\phi(r_k,\theta_k,t) = Qe^{-i\omega t + i\frac{\omega}{c_0}L\cos(\theta_{k0}-\alpha)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n\left(\frac{\omega}{c_0}r_k\right)e^{-in\alpha}e^{in\theta_k} \text{ (k=1,2,…,N);}$$

$$\phi(r_0,\theta_0,t) = Qe^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n\left(\frac{\omega}{c_0}r_0\right)e^{-in\alpha}e^{in\theta_0} \qquad (13)$$

Акустические давления на поверхностях контакта пьезокерамических оболочек с акустическими средами ($r_k=R_k$,k=1,2,…,N) и на границе соприкосновения внешней среды с акустическим экраном ($r_0=R_0$) согласно соотношениям (4), (11), (12), (13) также описываются рядами

$$P_6^{(0)} = P^{(0)}\Big|_{r_i=R_i} = e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n^{(0)}(R_i)e^{in\theta_i} \qquad (i=0,1,...,N)$$

$$P_6^{(k)} = P^{(k)}\Big|_{r_k=R_k} = e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n^{(k)}(R_k)e^{in\theta_k} \qquad (k=0,1,...,N) \qquad (14)$$

$$P_6^{(N+1)} = P^{(N+1)}\Big|_{r_0=R_0} = e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n^{(N+1)}(R_0)e^{in\theta_0}$$

В случае пьезопреобразователей со сплошными токопроводящими покрытиями для рассмотренных вариантов их коммутации напряженность электрического поля $E_r^{(k)}$ пропорциональна нулевой компоненте прогиба $W_0^{(k)}$.

Далее, уравнения движения оболочек относительно n-ых гармоник перемещений $W_n^{(k)}$,$U_n^{(k)}$, выразим их через составляющие акустических нагрузок $q_n^{(k)}$.

Для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (11), соотношения (11), (12), (14) подставляются в граничные условия, в результате чего вычисление искомых величин $A_n^{(0)}$, $B_n^{(k)}$, (k=1,2,…,N), $B_n^{(N+1)}$, сводятся к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$A_n^{(k)} + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N}{}'\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_{nm1}^{(kj)}A_m^{(j)} + G_{n1}^{(k)}B_n^{(k)} = QU_{n1}^{(k)};$$

$$G_{n2}^{(k)}A_n^{(k)} + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N}{}'\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_{nm2}^{(kj)}A_m^{(j)} + B_{n2}^{(k)} = QU_{n1}^{(k)}; \text{ (k=1,2,…,N)}$$

$$A_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_{nm1}^{(0j)}A_m^{(j)} + G_{n1}^{(0)}B_n^{(N+1)} = QU_{n1}^{(0)}; \qquad (15)$$

$$G_{n2}^{(0)}A_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_{nm2}^{(0j)}A_m^{(j)} + B_{n2}^{(N+1)} = QU_{n2}^{(0)}.$$

Если пьезопреобразователи не содержат акустических сред во внутренних объемах, бесконечная система (15) упрощается, принимая вид:

$$A_n^{(k)} + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N}{}'\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_{nm1}^{(kj)}A_m^{(j)} = QU_{n1}^{(k)} \quad \text{(k=1,2,…,N);}$$

$$A_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm\,1}^{(0j)} A_m^{(j)} + G_{n1}^{(0)} B_n^{(N+1)} = QU_{n1}^{(0)};$$
$$G_{n2}^{(0)} A_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm\,1}^{(0j)} A_m^{(j)} + B_n^{(N+1)} = QU_{n2}^{(0)}. \quad (16)$$

Можно показать, что системы (15) (16) являются квазирегулярными и имеют единственное решение, которое может быть получено методом редукции.

Располагая значениями постоянных $A_n^{(k)}$, B_n не трудно рассчитать физические характеристики изучаемого динамического процесса. Так, согласно выражению (14) определяются давления в акустических средах на поверхностях их контакта с оболочками, по формулам (3) – действующие на них акустические нагрузки

Асимптотические формулы для расчёта дальнего поля давлений включают составляющую, описывающую возмущение, обусловленную акустическим экраном, расположенным внутри антенной решетки:

$$P_D^{(0)} = e^{-i\omega t} i\rho_0\omega \sum_{j=0}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)} \frac{2}{\sqrt{\pi \frac{\omega}{c_0} r_j}} e^{i\left(\frac{\omega}{c_0} r_j - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + in\theta_j}, \quad (17)$$

где $r_k = \sqrt{L^2 + r_0^2 - 2Lr\cos(\theta_0 - \theta_{k0})}$;

$$\theta_k = \pi - \theta_{k0} - arctg\,\frac{r_0 \sin(\theta_0 - \theta_{k0})}{L - r_0\cos(\theta_0 - \theta_{k0})}.$$

В качестве иллюстрации, применим полученные аналитические выражения для численной оценки акустических полей, создаваемых круговыми гидроэлектроупругими системами. Система располагается в воде с параметрами ρ_0=1000 кг/м^3 и c=1500 м/с.

Результаты численной оценки представлены на рис.2. Расчеты проводились для следующих значений: N=4; L=5R; R=0,0675 м; h=0,006 м; $R_Э$=0,24 м; расстояние в дуге между поверхностями соседних элементов l=0,09R; f=4 кГц, 10 кГц; z_H=R=1000 м. Резонансная частота пульсирующих колебаний преобразователей в воде составляла 10 кГц. Количество членов, учитываемых в разложениях полей, выбиралась так, чтобы вклад последнего учитываемого члена не превышал 3÷4 % от суммарного получаемого результата.

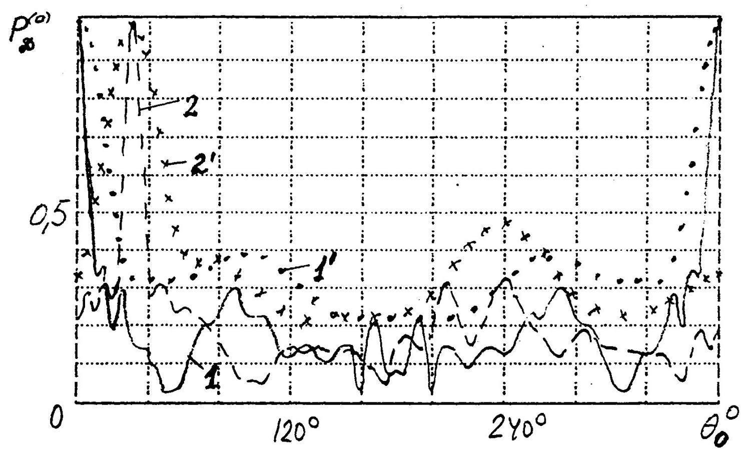

Рис.2. Угловые зависимости нормализованных акустических давлений рассеянного поля решеток преобразователей с идеально податливым акустическим экраном.
1 – α = 0^0, f = 10 кГц; 1$'$ – α = 0^0, f = 4 кГц; 2 – α = 30^0, f = 10 кГц; 2$'$– α = 30^0, f = 4 кГц.