УДК 534.231

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЯХ С ВРЕМЕННОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ

**И.Т. СЕЛЕЗОВ, докт. физ.- мат. наук, проф.**
*Институт гидромеханики НАНУ, г. Киев, Украина*

Представлены традиционные и обобщенные уравнения феррогидродинамики, описывающие поведение магнитной жидкости (суспензии с феррочастицами размером 3-15 нм) с учетом температурной релаксации. В обобщенной модели учитываются эффекты сжимаемости и временной релаксации, что приводит к гиперболической системе уравнений, предсказывающей распространение волн с конечными скоростями.

## ВВЕДЕНИЕ

Традиционная модель включает обычное уравнение теплопроводности параболического типа, которое описывает диффузию тепла в среде, и при возбуждении среды предсказывает распространение слабого разрыва с бесконечной скоростью. В случае связанных полей, в данном случае магнитогидродинамического поля, этот парадокс преодолевается расширением параболического оператора до гиперболического. Эта процедура ведет свое начало от Максвелла (1867) [6], основоположника теории электромагнетизма. Он представил гиперболическую модель, которая описывает распространение электромагнитных волн с конечной скоростью, равной скорости света. Впоследствии он развил гиперболическую модель теплопроводности на основе кинетической теории газов, которая описывает распространение тепла с конечной скоростью, и вывел формулу для этой скорости. С математической точки зрения в обоих случаях параболический оператор расширялся до гиперболического. Все последующие многочисленные исследования по обобщению параболических моделей в гиперболические, в частности гиперболические модели термоупругости основаны на этой идее [3].

Исследование распространения звука в магнитных жидкостях без учета временной релаксации проводилось в [2, 5, 8].

## МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ФЕРРОЖИДКОСТИ

Рассмотрим основные уравнения, описывающие движение сжимаемой вязкой магнитной жидкости. Подавляющее большинство прикладных исследований проводится на основе традиционных уравнений, включающих уравнение движения и условие несжимаемости [1]

$$\hat{\rho}\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}p+\eta\nabla^2\vec{V}+\mu_0(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{H}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0, \tag{1}$$

уравнение диффузии тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})T=\kappa\nabla^2 T, \tag{2}$$

а также уравнения Максвелла, включающие закон Ампера и условие отсутствия магнитных зарядов

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=0\,, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{3}$$

и определяющие уравнения

$$\hat{\rho}=\hat{\rho}\left[1-\beta\left(T-T_0\right)\right], \tag{4}$$

$$M=M^*-K_p\left(T-T^*\right)+\chi\left(H-H^*\right), \tag{5}$$

$$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{M}+\vec{H}\right). \tag{6}$$

Предполагается, что все искомые функции зависят от вектора $\vec{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$ и времени $t$. В (1)—(6) приняты обозначения: $\hat{\rho}$ - плотность, $\vec{V}$ - вектор скорости, $\vec{V}=\{V_1,V_2,V_3\}$, $\vec{\nabla}$ -- оператор Гамильтона, $\vec{\nabla}\equiv\vec{e}_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\vec{e}_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\vec{e}_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}$, $P-$давление, $\eta$ - коэффициент вязкости, $\nabla^2$ - оператор Лапласа, $\nabla^2\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\vec{M}$ - вектор намагниченности, $\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, $\vec{B}$ -- вектор магнитной индукции, $T$ - температура, $k$ - коэффициент температуропроводности, $K_p$ -- пиромагнитный коэффициент, $\mu_0$ - магнитная проницаемость.

Из (4) и (5) видно, что влияние температуры проявляется в уменьшении плотности и намагниченности магнитной жидкости.

На начальном участке кривой намагниченности, когда напряженность магнитного поля невелика, влияние температуры можно не учитывать и вектор намагниченности $\vec{M}$ можно принять коллинеарным вектору напряженности магнитного поля $\vec{H}$. В этом случае закон намагниченности принимает вид [1, 7]

$$\vec{M}=\chi\vec{H}, \qquad \chi=\chi_r=\text{const} \qquad \chi_r=\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{\rho,T}. \tag{7}$$

В этом случае сила $\mu_0(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{H}$ может быть представлена в виде $\mu_0 M\vec{\nabla}H$ и уравнения (1) записываются в виде

$$\hat{\rho}\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}\rho+\eta\nabla^2 V+\mu_0\chi H\vec{\nabla}H\,, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0\,, \tag{8}$$

уравнение (6) приводится к виду

$$\vec{B}=\mu_0\left(1+\chi\right)\vec{H}\,. \tag{9}$$

Система уравнений (3) представлятся в виде

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0 \tag{10}$$

и после введения потенциала магнитного поля по формуле $\vec{H}=\vec{\nabla}\psi$ она приводится к уравнению Лапласа.

$$\nabla^2\psi=0\,. \tag{11}$$

Разрешающая система уравнений (8), (2), (11) описывает медленные движения магнитной жидкости и может быть пригодна для исследования поверхностных волн.

**Модель сжимаемой невязкой феррожидкости**

В отличие от предыдущей модели будем рассматривать уравнения, описывающие слабые возмущения покоящейся в начальном состоянии сжимаемой невязкой жидкости, для которой балансовые и определяющие уравнения принимают следующий вид:
уравнение сохранения импульса

$$\hat{\rho}\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}p+\mu_0(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{H}, \tag{12}$$

уравнение состояния

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-K\vec{\nabla}\cdot\vec{V}+\beta K\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{13}$$

обобщенное гиперболическое уравнение распространения тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t}+T=\kappa\nabla^2T-\tau\frac{\partial^2T}{\partial t^2}-\gamma\vec{\nabla}\cdot\vec{V}, \tag{14}$$

уравнение для потенциала магнитного поля

$$\nabla^2\psi=0, \qquad \vec{H}=\vec{\nabla}\psi, \tag{15}$$

определяющие уравнения

$$\vec{M}=\chi H, \qquad \vec{B}=\mu_0(1+\chi)\vec{H}, \tag{16}$$

где K -- объемный модуль упругости, $\beta$ -- объемный коэффициент температурного расширения, $\tau$ -- время релаксации, $\gamma=\dfrac{c_p-c_v}{\beta c_v}$ -- коэффициент термоупругого рассеяния.
Влияние температуры на плотность и намагниченность не учитывается.

Представляем поле в виде суммы невозмущенного и возмущенного

$$\hat{p}(\vec{x},t)=p_0+p(\vec{x},t), \qquad \hat{\rho}(\vec{x},t)=\rho_0+\rho(\vec{x},t) \tag{17}$$

$$\vec{V}(\vec{x},t)=0+\vec{v}(\vec{x},t), \quad T(\vec{x},t)=T_0(\vec{x})+\hat{t}(\vec{x},t)$$

$$\vec{H}(\vec{x},t)=\vec{H}_0(\vec{x})+\vec{h}(\vec{x},t), \qquad \vec{M}(\vec{x},t)=\vec{M}_0(\vec{x})+\vec{m}(\vec{x},t)$$

После подстановки (17) в систему (12)-(16) получаем две задачи: статическую и динамическую. В первой задаче искомые функции не зависят от времени. Для второй задачи, полагая возмущенные величины малыми по сравнению с невозмущенными и вводя потенциал скоростей $\vec{v}=\vec{\nabla}\varphi$, получаем систему линеаризованных уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_0^2\nabla^2\varphi=-\beta c_0^2\frac{\partial\hat{t}}{\partial t}+\frac{\mu_0(1+\chi)}{\rho_0}\left(\vec{\nabla}\psi_0\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial t^2}-c_t^2\nabla^2\hat{t}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\hat{t}}{\partial t}=\frac{1}{\tau}\nabla^2\varphi, \tag{19}$$

$$\nabla^2\psi=0, \tag{20}$$

где $c_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ -- скорость распространения волн объемной дилатации, $c_t = \sqrt{\frac{K}{\tau}}$ -- скорость распространения тепла. Уравнение (18) включает в правой части член, учитывающий влияние температуры, и диссипативный член, связанный с потерями в магнитной жидкости, а уравнение (19) включает член с временной релаксацией $\tau \frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial t^2}$ и член, учитывающий влияние дилатационного поля. Как видно из уравнения (12), последний член не равен нулю только в том случае, когда $\vec{\nabla}\psi \neq 0$.

Исходные уравнения для векторного поля сведены к замкнутой системе уравнений (18)-(20) относительно трех скалярных функций $\varphi, \hat{t}$ и $\psi$. Можно показать, что решение в классе одномерных бегущих волн $\exp[i(\kappa x - \omega t)]$ не существует. Более того, решение вида $f(z)\exp[i(\kappa x - \omega t)]$ также не существует в связи с ортогональностью операторов $L_1(\varphi, t)$ и $L_2(\psi)$. Для разрешимости задачи в классе бегущих волн требуется более точное описание магнитного поля.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Представлена обобщенная модель динамики магнитной жидкости, включающая гиперболическое уравнение для потенциала скоростей $\varphi$, гиперболическое уравнение для температуры $\hat{t}$ и эллиптическое уравнение для потенциала $\psi$. Показано, что решение для одномерных дилатационных волн в классе бегущих волн не существует и для разрешимости задачи необходимо расширить оператор магнитного поля.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. - М.: Химия, 1989. – 240 с.
2. *Гогосов В.В., Мартынов С.И., Цуриков С.Н., Шапошникова Г.А.* Распространение ультразвука в магнитной жидкости. 1. Учет агрегирования частиц; вывод и анализ дисперсионного уравнения. -- Магнитная гидродинамика, 1987, №2.- С. 19-27.
3. *Селезов И.Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. - Киев: Наук. думка, 1989.- 204 с.
4. *Selezov I.* Nonlinear wave propagation in close to hyperbolic systems.- Int. Series of Numerical Mathematics, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, 2001.- Vol. 141.- P. 851-860.
5. *Gotoh K., Isler W.E., Chang D.Y.* Theory of ultrasonic attenuation in magnetic fluids. - IEEE Trans. Magnetics, 1980, MAG-16, N2 – P. 211-213.
6. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases. - Phil. Roy. Soc., 1867, 157. - P. 49-89.
7. *Селезов И.Т., Корсунский С.В.* Нелинейные волны в гидроупругих системах с магнитными жидкостями.- Магнитная гидродинамика, 1991, № 2.- С. 41-44.
8. *Tarapov I.Ye., Patsegon N.F.* Nonlinear waves in conductive magnetizable fluid. - IEEE Trans. Magnetics, 1980, MAG-16, N2.- P. 309-316.