

УДК 534.231

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С НАКЛОННЫМ УЧАСТКОМ ДНА В ВИДЕ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю.И. ПАПКОВА, С.О. ПАПКОВ, А.А. ЯРОШЕНКО

Севастопольский национальный технический университет

Методом частичных областей получено решение задачи о звуковом поле точечного источника в гидроакустическом волноводе с наклонным участком дна в виде конической поверхности. В каждой из частичных областей построено общее решение уравнения Гельмгольца, точно удовлетворяющее условиям на стенках волновода и позволяющее выполнить условия сопряжения звукового поля. Проводится численная проверка условий сопряжения звукового поля. Численные исследования проведены для параметров волновода, характерных для прибрежной части моря.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные и теоретические результаты [1] показывают, что наличие геометрической неоднородности в волноводе дает зачастую принципиально иную картину звукового поля, чем в волноводе с плоскопараллельными границами. Однако попытка получить аналитическое решение подобной задачи, даже для простейшей модели с идеальными граничными условиями, наталкивается на существенные препятствия. В связи с этим, для расчета волноводов с неоднородной геометрией используются численные методы, например [2], и численно-аналитические методы.

При теоретическом анализе звуковых полей в акустических волноводах широкое применение получил метод частичных областей [3], позволяющий получить решение краевой задачи для волновода со сложной геометрией границы. В [4] на основе метода частичных областей был предложен один из возможных подходов к исследованию гидроакустических волноводов с неровным дном – аппроксимация неоднородностей системой цилиндрических ступеней с последующим сведением задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В данной работе исследуется гидроакустический волновод, наклонный участок дна которого описывается конической поверхностью.

1. ПОСТАНОВКА И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

Задача о распространении звуковых волн, возбуждаемых точечным гармоническим источником в гидроакустическом волноводе, имеющим наклонный участок дна в виде конической поверхности (рис. 1), описывается неоднородным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi = -\frac{\delta(z-z_0)\delta(r)}{2\pi r}, \quad (1)$$

где Φ - потенциал скоростей; ω - частота; $c(z)$ - профиль скорости звука; δ - дельта функция Дирака; $(0, z_0)$ – положение источника.

Положим, что поверхность волновода является акустически мягкой, а дно – акустически жестким:

$$\Phi(r, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} \right|_L = 0, \quad (2)$$

где L – кривая, определяющая форму дна.

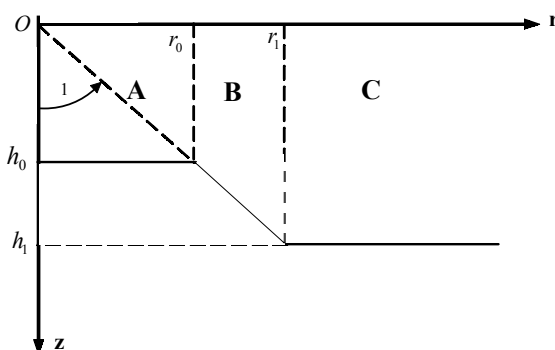


Рис.1. Сечение волновода

Для решения данной краевой задачи используем метод частных областей. В рамках данного метода волновод разбивается на три частичные области (рис.1):

область A - $(r, z) \in [0; r_0] \times [0; h_0]$,

область B с наклонным участком дна - $r \in [r_0, r_1]$ и $\theta \in [\theta_1; \frac{\pi}{2}]$,

область C - $(r, z) \in [r_1; \infty] \times [0; h_1]$.

В частных областях A и C , согласно [4], решение строится в виде суммы нормальных мод:

$$\Phi_A = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^A(z_0) \varphi_n^A(z)}{\gamma_n^A} H_0^{(1)}(\xi_n^A r) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\gamma_n^A} \frac{J_0(\xi_n^A r)}{J_0(\xi_n^A r_0)} \varphi_n^A(z);$$

$$\Phi_C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{\gamma_n^C} \frac{H_0^{(1)}(\xi_n^C r)}{H_0^{(1)}(\xi_n^C r_1)} \varphi_n^C(z), \quad (3)$$

где $\gamma_n^A = \int_0^{h_0} (\varphi_n^A(s))^2 ds$, $\gamma_n^C = \int_0^{h_1} (\varphi_n^C(s))^2 ds$; $\xi_n^A, \varphi_n^A, \xi_n^C, \varphi_n^C$ - собственные числа и функции

соответствующих задач Штурма-Луивилля:

$$\frac{d^2 \varphi^A}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right) \varphi^A = 0, \quad \varphi^A|_{z=0} = 0, \quad \frac{d\varphi^A}{dz} \Big|_{z=h_0} = 0;$$

$$\frac{d^2 \varphi^C}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right) \varphi^C = 0, \quad \varphi^C|_{z=0} = 0, \quad \frac{d\varphi^C}{dz} \Big|_{z=h_1} = 0. \quad (4)$$

Алгоритм построения собственных чисел и функций краевых задач (4) для кусочно-заданного профиля скорости звука $c(z)$ описан в [4]. Форма решения (3) такова, что граничные условия на стенках волновода в областях A и C выполнены точно, кроме того в области A выполнено условие в источнике, а в области C условие затухания на бесконечности.

2. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТИ С НАКЛОННЫМ УЧАСТКОМ ДНА

Рассмотрим уравнение Гельмгольца (1) в частичной области B в сферических координатах (ρ, θ) с центром в точке O ($\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$; $\theta = \arctg \frac{r}{z}$). Граничные условия на стенках волновода (2) примут вид

$$\Phi|_{\theta=\pi/2} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_1} = 0. \quad (5)$$

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, предположим, что в данной частичной области профиль скорости звука является постоянным $c(z) = c_0$. Введем обозначение $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ и проведем разделение переменных $\Phi = R(\rho)\Xi(\theta)$ для (1) в сферических координатах:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + k_0^2 \Phi = 0.$$

Получаем два дифференциальных уравнения:

$$R'' + \frac{2}{\rho} R' + (k_0^2 - \frac{\mu^2}{\rho^2})R = 0, \quad \Xi'' - \operatorname{tg} \theta \Xi' + \mu^2 \Xi = 0, \quad (6)$$

где μ – константа разделения.

Добавив ко второму уравнению (6) краевые условия $\frac{d\Xi}{d\theta}|_{\theta=\theta_1} = 0; \quad \Xi|_{\theta=\pi/2} = 0$,

получаем краевую задачу для определения собственных чисел и собственных функций угловой координаты θ , которые позволяют точно выполнить условия на стенках волновода.

Дифференциальное уравнение относительно координаты θ имеет следующее общее решение [5] $\Xi = C_1 P_\lambda(\cos \theta) + C_2 Q_\lambda(\cos \theta)$ ($\lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}}$), где P_λ, Q_λ – функции Лежандра нулевого порядка степени λ . Подстановка этого решения в краевые условия дает возможность получить дисперсионное уравнение для определения собственных чисел:

$$\cos \frac{\pi \lambda}{2} (\cos \theta_1 Q_\lambda(\cos \theta_1) - Q_{\lambda-1}(\cos \theta_1)) + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi \lambda}{2} (\cos \theta_1 P_\lambda(\cos \theta_1) - P_{\lambda-1}(\cos \theta_1)) = 0 \quad (7)$$

Согласно общей теории дифференциальных уравнений [5] данная задача имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$. Следуя [5], для собственных чисел λ_n можно

получить асимптотическую формулу $\lambda_n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{n+1/2}{\theta_1/\pi - 1/2}\right)^2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$, которая дает начальное приближение при численном решении (7).

Найденные собственные значения позволяют построить собственные функции данной краевой задачи $\Xi_n(\theta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi \lambda_n}{2} P_{\lambda_n}(\cos \theta) + Q_{\lambda_n}(\cos \theta)$. Используя асимптотические формулы для функций Лежандра [6], получаем асимптотическую формулу для Ξ_n :

$$\Xi_n(\theta) \approx \frac{\Gamma(\lambda_n + 1)}{\Gamma\left(\lambda_n + \frac{3}{2}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{2 \sin \theta}} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi \lambda_n}{2} \cos \left(\left(\lambda_n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\left(\lambda_n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Общее решение дифференциального уравнения относительно координаты ρ , соответствующее Ξ_n , имеет следующий вид $R(\rho) = C_1 j_{\lambda_n}(k_0 \rho) + C_2 y_{\lambda_n}(k_0 \rho)$, где j_{λ_n} и y_{λ_n} – сферические функции Бесселя порядка λ_n . Учитывая, что в рассматриваемой задаче

данные функции быстро возрастают (убывают), в качестве линейно независимых решений данного уравнения удобно взять следующие их линейные комбинации:

$$\begin{aligned}\tau_{1,n}(\rho) &= j_{\lambda_n}(k_0\rho)y'_{\lambda_n}(k_0\rho_0) - y_{\lambda_n}(k_0\rho)j'_{\lambda_n}(k_0\rho_0); \\ \tau_{2,n}(\rho) &= j_{\lambda_n}(k_0\rho)y'_{\lambda_n}(k_0\rho_1) - y_{\lambda_n}(k_0\rho)j'_{\lambda_n}(k_0\rho_1);\end{aligned}$$

где $\rho_0 = \sqrt{r_0^2 + h_0^2}$; $\rho_1 = \sqrt{r_1^2 + h_1^2}$.

Таким образом, общее решение (1), удовлетворяющее краевым условиям на стенках волновода (5) и позволяющее выполнить условия сопряжения в области B имеет вид

$$\Phi_B = \sum_{n=0}^{\infty} (X_n \tau_{1,n}(\rho) + Y_n \tau_{2,n}(\rho)) \Xi_n(\theta) \quad (8).$$

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РАВЕНСТВА

Построенное общее решение (3), (8) уравнения Гельмгольца (1) содержит четыре последовательности неопределенных коэффициентов x_n, X_n, Y_n, z_n , которые определяются из условий сопряжения звукового поля:

$$\Phi_A|_{r=r_0} = \Phi_B|_{r=r_0}; \quad \frac{\partial \Phi_A}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \frac{\partial \Phi_B}{\partial r}\Big|_{r=r_0}; \quad \Phi_B|_{r=r_1} = \Phi_C|_{r=r_1}; \quad \frac{\partial \Phi_B}{\partial r}\Big|_{r=r_1} = \frac{\partial \Phi_C}{\partial r}\Big|_{r=r_1}. \quad (9)$$

Из (9) следуют четыре функциональных равенства

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{\varphi_n^A(z)}{\gamma_n^A} - \sum_{n=0}^{\infty} (X_n \tau_{1,n}(\rho(r_0, z)) + Y_n \tau_{2,n}(\rho(r_0, z))) \Xi_n(\theta(r_0, z)) &= -\frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^A(z_0) \varphi_n^A(z)}{\gamma_n^A} H_0^{(1)}(\xi_n^A r_0); \\ \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{\xi_n^A J_1(\xi_n^A r_0)}{J_0(\xi_n^A r_0)} \frac{\varphi_n^A(z)}{\gamma_n^A} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(X_n \left(\tau'_{1,n}(\rho(r_0, z)) \sin \theta(r_0, z) \Xi_n(\theta(r_0, z)) + \frac{\cos \theta(r_0, z)}{\rho(r_0, z)} \tau_{1,n}(\rho(r_0, z)) \Xi'_n(\theta(r_0, z)) \right) + \right. \\ \left. + Y_n \left(\tau'_{2,n}(\rho(r_0, z)) \sin \theta(r_0, z) \Xi_n(\theta(r_0, z)) + \frac{\cos \theta(r_0, z)}{\rho(r_0, z)} \tau_{2,n}(\rho(r_0, z)) \Xi'_n(\theta(r_0, z)) \right) \right) &= -\frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^A(z_0) \varphi_n^A(z)}{\gamma_n^A} \xi_n^A H_1^{(1)}(\xi_n^A r_0) \\ & \quad (z \in [0; h_0])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} z_n \frac{\varphi_n^C(z)}{\gamma_n^C} - \sum_{n=0}^{\infty} (X_n \tau_{1,n}(\rho(r_1, z)) + Y_n \tau_{2,n}(\rho(r_1, z))) \Xi_n(\theta(r_1, z)) &= 0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} z_n \frac{\xi_n^C H_1^{(1)}(\xi_n^C r_1)}{H_0^{(1)}(\xi_n^C r_1)} \frac{\varphi_n^C(z)}{\gamma_n^C} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(X_n \left(\tau'_{1,n}(\rho(r_1, z)) \sin \theta(r_1, z) \Xi_n(\theta(r_1, z)) + \frac{\cos \theta(r_1, z)}{\rho(r_1, z)} \tau_{1,n}(\rho(r_1, z)) \Xi'_n(\theta(r_1, z)) \right) + \right. \\ \left. + Y_n \left(\tau'_{2,n}(\rho(r_1, z)) \sin \theta(r_1, z) \Xi_n(\theta(r_1, z)) + \frac{\cos \theta(r_1, z)}{\rho(r_1, z)} \tau_{2,n}(\rho(r_1, z)) \Xi'_n(\theta(r_1, z)) \right) \right) &= 0 \\ & \quad (z \in [0; h_1])\end{aligned}$$

Чтобы найти коэффициенты, используем метод наименьших квадратов. В рядах удерживалось первые N неизвестных коэффициентов, которые выбирались из требования минимизации функционала невязки в некоторых выбранных точках $\{\bar{z}_j\}_{j=0}^{\bar{N}}$ рассматриваемого отрезка. В частности, для первого функционального равенства данный функционал имеет вид

$$I_N^1 = \sum_{j=0}^{\bar{N}} |\Phi_A(r_0, \bar{z}_j) - \Phi_B(r_0, \bar{z}_j)|^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

Из (10) можно получить следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных величин

$$\sum_{n=0}^N x_n \left(\frac{1}{\gamma_n^A} \sum_{j=0}^{\bar{N}} \varphi_n^A(\bar{z}_j) \varphi_m^A(\bar{z}_j) \right) - \sum_{n=0}^N X_n \left(\sum_{j=0}^{\bar{N}} \tau_{1,n}(\bar{\rho}_j) \varphi_m^A(\bar{z}_j) \Xi_n(\bar{\theta}_j) \right) -$$

$$- \sum_{n=0}^N Y_n \left(\sum_{j=0}^{\bar{N}} \tau_{2,n}(\bar{\rho}_j) \varphi_m^A(\bar{z}_j) \Xi_n(\bar{\theta}_j) \right) = -\frac{i}{4} \sum_{j=0}^{\bar{N}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^A(z_0) \varphi_n^A(\bar{z}_j)}{\gamma_n^A} H_0^{(1)}(\xi_n^A r_0) \right) \varphi_m^A(\bar{z}_j)$$

(m = 0, 1, ... N)

где $\bar{\rho}_j = \sqrt{r_0^2 + \bar{z}_j^2}$; $\bar{\theta}_j = \arctg \frac{r_0}{\bar{z}_j}$.

Аналогичным образом из оставшихся трех функциональных соотношений строятся недостающие уравнения системы уравнений. Отметим, что данный подход к определению неизвестных коэффициентов позволяет обойтись без вычисления интегралов от сферических функций и как следствие использовать системы уравнений высокого порядка.

4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Положим параметры волновода следующими $h_0 = r_0 = 50$ (м), $h_1 = r_1 = 55$ (м), $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\omega = 30$ (Гц), скорость звука – постоянной и равной 1500 (м/с), источник располагается в точке $z_0 = 10$ (м). При данных параметрах волновода, описанным в предыдущем пункте способом, определялись коэффициенты в представлении общего решения. На рис.2. представлена относительная погрешность выполнения первого из условий (9).

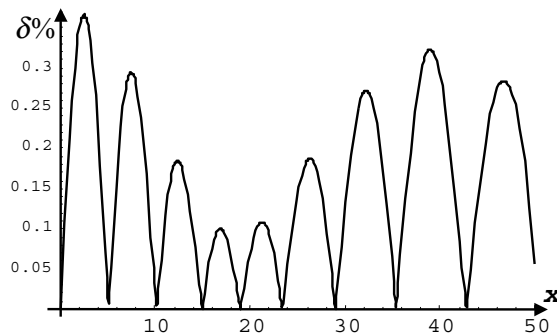


Рис.2. Относительная погрешность выполнения условий сопряжения

для $\Phi_A|_{r=r_0} = \Phi_B|_{r=r_0}$.

Как видно из рисунка, погрешность в выполнении данного условия менее 1%. Аналогично ведет себя невязка и для условия $\Phi_B|_{r=r_1} = \Phi_C|_{r=r_1}$. Условия на нормальные производные выполняются хуже, здесь относительная погрешность достигает 5%, что связано с наличием особенности в угловой точке.

На рис. 3 показано поведение потенциала звукового давления $\Phi(r, z)$ в зависимости от r в сравнении с потенциалом для идеального волновода глубины h_1 , для которого на данной частоте существуют только затухающие моды. Графики оказываются достаточно

близкими, что связано с относительно небольшим изменением формы дна. При этом наличие неоднородности приводит к увеличению звукового давления.

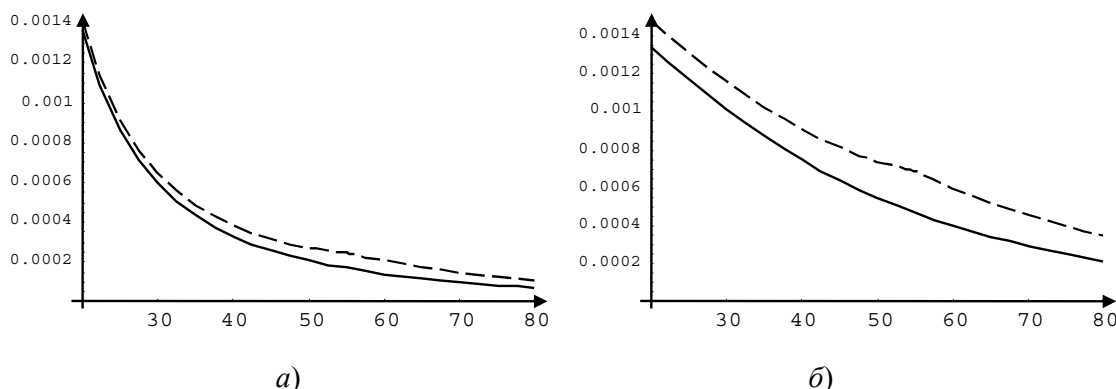


Рис.3. Зависимость $|\Phi(r, z)|$ от r при (а) – $z = 10$ (м), (б) – $z = 40$ (м)

(————— - идеальный волновод; - - - - - волновод с выступом).

ВЫВОДЫ

Полученная аналитическая форма решения задачи о звуковом поле для волновода с наклонным участком дна в виде конической поверхности позволяет выяснить степень влияния неоднородности на акустическое поле по сравнению с волноводом с плоскопараллельными границами. В качестве критерия точности решения краевой задачи служат условия на границе раздела частичных областей, проведенные расчеты показали удовлетворительное выполнение граничных условий. Численные исследования показывают, что небольшие вариации формы дна дают небольшие изменения звукового поля. Предлагаемый подход дает, в перспективе, возможность исследовать энергетические характеристики звукового поля для данного волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акустика океана: Пер. с англ. / Под ред. Дж. Де Санто. – М.: Мир, 1982. – 318с.
2. Завадский В.Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. – М.: Наука, 1972. – 558с.
3. Гринченко В.Т., Вовк И.В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. — Киев: Наук. думка, 1986. – 240с.
4. Папков С.О., Папкина Ю.И., Ярошенко А.А. Звуковое поле в неоднородном гидроакустическом волноводе со ступенчатым дном // Акуст.вісн. – 2003. – Т.6, №1. – С. 32 – 42.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1976. – 5-е изд. – 576с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: Пер. с англ./ Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.