

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

ПАПКОВ С.О., ЧЕХОВ В.Н.*

*Севастопольский национальный технический университет
Таврический национальный университет**

На основе анализа однородной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений построены собственные формы колебаний прямоугольной призмы. Использование преобразования Лапласа позволило получить представление решения задачи о динамическом деформировании прямоугольной призмы в виде разложения по собственным формам колебаний. Проведены численные исследования для квадратного поперечного сечения при затухающей внешней нагрузке.

ВСТУПЛЕНИЕ

Для прямоугольной призмы эффективный метод решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях неканонических тел представлен в монографии В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко [1], на основе которого решается задача об отыскании спектра собственных частот призмы, конечного цилиндра. В работе [2] для анализа нестационарных процессов в конечном цилиндре использовалась информация о собственных частотах и формах вынужденных установившихся колебаний. Так как после применения преобразования Лапласа к уравнениям Ламе система соотношений оказывается близкой к системе соотношений в стационарном случае, то в [2] изображение по Лапласу для вектора смещений строится аналогично случаю установившихся колебаний.

В [3] предлагаются новые достаточные условия существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, на основе которых строится алгоритм вычисления собственных значений призмы с заданной точностью. Рассматривая на рассчитанных собственных частотах однородную квазирегулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую вынужденным установившимся колебаниям призмы [1], оказывается возможным получить аналитическое представление для собственных форм колебаний призмы, в том числе и на высоких частотах.

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о нестационарном деформировании прямоугольной призмы (рис. 1) под воздействием меняющихся во времени напряжений на границе и объемных сил.

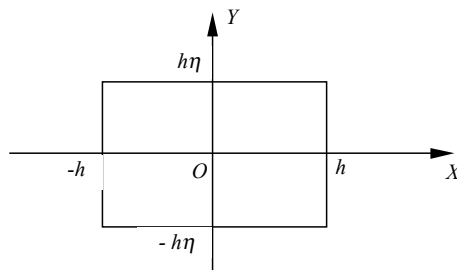


Рис. 1. Сечение призмы

Для изотропного материала с упругими постоянными ν и G вектор смещений $\vec{U}(x, y, t)$ удовлетворяет векторному уравнению Ламе:
$$\mathcal{L}[\vec{U}] = \frac{\rho h}{G} \left(h \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \vec{F} \right), \quad (1)$$

где $\mathcal{L}[\vec{U}] \equiv \Delta \vec{U} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{grad} \mathbf{div} \vec{U}$; $x = X/h$; $y = Y/h$.

Краевые условия в напряжениях запишутся как

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}(1, y, t) = \tilde{\sigma}_x(y, t); \frac{1}{2G} \sigma_{xy}(1, y, t) = 0; \frac{1}{2G} \sigma_{yy}(x, \eta, t) = \tilde{\sigma}_y(x, t); \frac{1}{2G} \sigma_{xy}(x, \eta, t) = 0, \quad (2)$$

а начальные условия имеют вид: $\vec{U}|_{t=0} = \vec{u}_0(x, y)$; $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}|_{t=0} = \vec{v}_0(x, y)$.

Пусть найдены собственные частоты $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ и собственные формы установившихся колебаний призмы $\{\vec{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющие системе соотношений

$$\mathcal{L}[\vec{U}_m] = -(\pi\Omega_m/2)^2 \vec{U}_m \quad (3)$$

при однородных граничных условиях на напряжения: $\sigma_{xx}(1, y) = \sigma_{xy}(x, \eta) = \sigma_{xy}(1, y) = \sigma_{yy}(x, \eta) = 0$.

Известно, что собственные формы колебаний обладают ортогональностью и полнотой в соответствующем классе функций:

$$\iint_D \vec{U}_n \vec{U}_m dx dy = 0 \quad (n \neq m) \quad (D - \text{сечение призмы}). \quad (4)$$

Применение преобразования Лапласа к уравнению Ламе (1) и условиям (2) по переменной t приводит к следующей краевой задаче в изображениях

$$\mathcal{L}[\vec{U}^*] = \frac{\rho h}{G} (hp^2 \vec{U}^* - hp\vec{u}_0 - h\vec{v}_0 - \vec{F}^*) \quad (5)$$

с краевыми условиями, зависящими от параметра p

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}^*(1, y, p) = \tilde{\sigma}_x^*(y, p); \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^*(1, y, p) = 0; \frac{1}{2G} \sigma_{yy}^*(x, \eta, p) = \tilde{\sigma}_y^*(x, p); \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^*(x, \eta, p) = 0; \quad (6)$$

где $\vec{U}(x, y, t) \stackrel{\cdot}{\cong} \vec{U}^*(x, y, p)$;

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_x^*}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_y^*}{\partial y}; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yy}^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_y^*}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_x^*}{\partial x}; \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x^*}{\partial y} + \frac{\partial U_y^*}{\partial x} \right)$$

$$\vec{F}(x, y, t) \stackrel{\cdot}{\cong} \vec{F}^*(x, y, p); \quad \tilde{\sigma}_x(y, t) \stackrel{\cdot}{\cong} \tilde{\sigma}_x^*(y, p); \quad \tilde{\sigma}_y(x, t) \stackrel{\cdot}{\cong} \tilde{\sigma}_y^*(x, p).$$

Ищем решение краевой задачи (5)-(6) в виде разложения по собственным функциям $\{\vec{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$. Так как граничные условия неоднородные, то к данному разложению прибавим функцию \vec{U}_σ^* , удовлетворяющую граничным условиям (6), но не обязательно

удовлетворяющую (5):
$$\vec{U}^* = \vec{U}_\sigma^*(x, y, p) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \vec{U}_m(x, y) \quad (7)$$

Построить \vec{U}_σ^* можно, например, следующим образом:

$$\vec{U}_\sigma^* = \left(\begin{array}{l} \frac{1-2\nu}{\nu} \int \tilde{\sigma}_y(x, p) dx - \frac{(1-\nu)^2}{\nu} \tilde{\sigma}_y(1, p)x + (1-\nu)\tilde{\sigma}_x(\eta, p)x \\ \frac{1-2\nu}{\nu} \int \tilde{\sigma}_x(y, p) dy - \frac{(1-\nu)^2}{\nu} \tilde{\sigma}_x(\eta, p)y + (1-\nu)\tilde{\sigma}_y(1, p)y \end{array} \right). \quad (8)$$

В этом можно убедиться непосредственным расчетом по (8) компонентов тензора напряжений. При таком построении разложения (7) граничные условия (6) для изображения $\vec{U}^*(x, y, p)$ будут выполняться с той точностью, с которой построены собственные формы колебаний $\{\vec{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Коэффициенты разложения $A_m(p)$ находятся на основе ортогональности собственных функций $\{\vec{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$$A_m(p) = \frac{1}{\left(\left(\frac{\pi \Omega_m}{2} \right)^2 + \frac{\rho h^2}{G} p^2 \right)} \frac{\iint_D \left(\mathcal{L}[\bar{U}_\sigma^*] - \frac{\rho h^2}{G} p^2 \bar{U}_\sigma^* + \frac{\rho h^2}{G} p \bar{u}_0 + \frac{\rho h^2}{G} \bar{v}_0 + \frac{\rho h}{G} \bar{F}^* \right) \bar{U}_m dx dy}{\iint_D \bar{U}_m^2 dx dy}. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (7) дает выражение для изображения вектора смещения, откуда на основе обратного преобразования Лапласа можно найти оригинал – искомый вектор смещений.

2. ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПРИЗМЫ

Как следует из вышеприведенных формул для собственных форм желательно иметь аналитическое представление. Рассмотрим алгоритм построения собственных форм вынужденных установившихся колебаний прямоугольной призмы. Ограничимся случаем симметричного напряженно-деформированного состояния, для которого представление решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях с частотой ω имеет вид:

$$u(x, y) = C_0 \sin \Omega_1 x - \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\alpha_n}{p_{1n}} \operatorname{ch} p_{1n} y + B_n \frac{p_{2n}}{\alpha_n} \operatorname{ch} p_{2n} y \right) \sin \alpha_n x + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} q_{1n} x + D_n \operatorname{sh} q_{2n} x) \cos \beta_n y,$$

$$v(x, y) = A_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} p_{1n} y + B_n \operatorname{sh} p_{2n} y) \cos \alpha_n x - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\beta_n}{q_{1n}} \operatorname{ch} q_{1n} x + D_n \frac{q_{2n}}{\beta_n} \operatorname{ch} q_{2n} x \right) \sin \beta_n y.$$

Здесь $\alpha_n = \pi n$, $\beta_n = \frac{\pi n}{\eta}$ (η – отношение сторон призмы); $q_{l,n}^2 = \beta_n^2 - \Omega_l^2$, $p_{l,n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_l^2$

($l=1,2$), $\Omega_1 = \frac{\omega h}{c_1}$, $\Omega_2 = \frac{\omega h}{c_2}$ (обезразмеренные частоты); $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ – скорость продольной

волны; $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ – скорость сдвиговой волны.

Подстановка данного решения в однородные граничные условия приводит к бесконечной системе

$$\begin{cases} \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\sin \Omega_1 \eta}{\eta} A_0 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 C_0 = \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha_n^2 p_{1n}^2}, \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos(\Omega_1 \eta) A_0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \sin \Omega_1 C_0 = \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{\beta_n^2 q_{1n}^2}, \\ x_m = -\frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) \Delta_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} \left(\frac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2 + p_{2m}^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\beta_n^2} \right) y_n + \frac{2\nu \Omega_1^2 \sin \Omega_1}{(1-2\nu) \Delta_m p_{1m}^2} C_0, \\ y_m = -\frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) \Delta_m^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2} \left(\frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + q_{2m}^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\alpha_n^2} \right) x_n + \frac{2\nu \Omega_1^2 \sin \Omega_1 \eta}{(1-2\nu) \eta \Delta_m^* q_{1m}^2} A_0, \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

где $x_m = \frac{(-1)^m \operatorname{sh} p_{2m} \eta}{\eta} B_m$; $y_m = (-1)^m \operatorname{sh} p_{2m} D_m$; $\Delta_m = \eta \left(p_{2m} \operatorname{cth} p_{2m} \eta - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} \eta \right)$; $\Delta_m^* = q_{2m} \operatorname{cth} q_{2m} - \frac{(\beta_m^2 + q_{2m}^2)^2}{4\beta_m^2 q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m}$.

Относительно системы (10) известно, что она является квазирегулярной [1].

В основе предлагаемого алгоритма лежит возможность сведения однородной

квазирегулярной бесконечной системы
$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} x_n \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

с помощью замены $x_k = \sum_{j=1}^{N^*} z_k^{(j)} x_j$ ($k > N^*$, где N^* – номер, начиная с которого для уравнений

(11) выполняются условия регулярности) к совокупности регулярных бесконечных систем относительно $\{z_k^{(j)}\}_{k=N^*+1}^{\infty}$ ($j = 1, 2, \dots, N^*$):

$$z_k^{(j)} = \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(j)} + c_{k,j} \quad (k > N^*, \quad j = 1, 2, \dots, N^*), \quad (12)$$

и к конечной системе (при $k=1, 2, \dots, N^*$):

$$x_k = \sum_{j=1}^{N^*} [c_{k,j} + \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(j)}] x_j. \quad (13)$$

Применение данного подхода к системе (10) позволяет установить для (12) справедливость асимптотического закона, аналогичного [1], на основе которого оказывается возможным определить решение (12) с требуемой точностью (в частности, методом улучшенной редукции или методом лимитант). При этом регулярные бесконечные системы (12) одинаково эффективно решаются на всем диапазоне частот, включая собственные частоты. Таким образом, построение нетривиального решения бесконечной системы (10) сводится к построению нетривиального решения конечной системы вида (13). Очевидно, что на собственных значениях призмы определитель конечной системы (13) должен обращаться в нуль, что требует в расчетах максимально точного определения собственных значений.

Найденное на собственной частоте призмы нетривиальное решение системы (13) позволяет по формулам замены восстановить все компоненты нетривиального решения бесконечной системы (10). Его подстановка в общее решение дает возможность получить аналитическое выражение для собственных форм призмы $\vec{U}_m = U_m^x \vec{i} + U_m^y \vec{j}$:

$$\begin{aligned} U_m^x &= C_0(m) \sin \Omega_1 x - \eta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_{2n} \operatorname{ch} p_{2n} y}{\alpha_n \operatorname{sh} p_{2n} \eta} - \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n p_{1n}} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} \eta} \right) (-1)^n x_n(m) \sin \alpha_n x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\operatorname{sh} q_{2n}} - \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n^2} \frac{\operatorname{sh} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{1n}} \right) (-1)^n y_n(m) \cos \beta_n y, \\ U_m^y &= A_0(m) \sin \Omega_1 y + \eta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} \eta} - \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2} \frac{\operatorname{sh} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} \eta} \right) (-1)^n x_n(m) \cos \alpha_n x - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_{2n} \operatorname{ch} q_{2n} x}{\beta_n \operatorname{sh} q_{2n}} - \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n q_{1n}} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{1n}} \right) (-1)^n y_n(m) \sin \beta_n y. \end{aligned} \quad (14)$$

В формулах (14) все величины, зависящие от частоты, вычисляются на соответствующей собственной частоте $\Omega = \Omega_m$; $C_0(m)$, $A_0(m)$, $x_n(m)$, $y_n(m)$ - нетривиальное решение системы (10), соответствующее m -ой собственной форме.

Аналогично случаю вынужденных колебаний, ряды, представляющие собственные формы колебаний, требуют улучшения сходимости на границе области. Используя закон, описывающий асимптотическое поведение нетривиального решения системы (10)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a_0, \quad (15)$$

можно аналитически свернуть остатки рядов в (15), полагая $x_n \approx a_0$; $y_n \approx -a_0$ при $n > \hat{N}$.

Для значений отношения сторон призмы $\eta_L = \frac{2n-1}{2m-1}$ ($n, m \in \mathbf{N}$) собственные частоты

оказываются равны $\Omega_L^m = \sqrt{2}(2m-1)$, а соответствующие им формы колебаний выражаются через произведения тригонометрических функций:

$$u_L = -C \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2}; \quad v_L = C \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2} \sin \frac{(2m-1)\pi y}{2}.$$

Исторически за данными формами колебаний закрепилось название моды Ламе. Ниже проводится сравнение построенной собственной формы с модами Ламе (таблица 1) для $v=0,17$ при частоте $\Omega^* = \sqrt{2}$, которая соответствует первой собственной частоте. Увеличение \bar{N} - числа уравнений, удерживаемых в расчетах при использовании метода улучшенной

редукції, і улучшення сходимости рядов (14) на основе (15) позволяет получить результаты достаточно близкие к аналитическому решению.

Таблица 1 – Сравнение построенных собственных форм с модами Ламе

x_j	$u_L(x_j, x_j)$	$u(x_j, x_j)$		$u(x_j, x_j)$	
		без улучшения сходимости		с улучшением сходимости	
		$\bar{N} = 10$	$\bar{N} = 100$	$\bar{N} = 10$	$\bar{N} = 100$
0,2	0,293893	0,293895	0,293893	0,293895	0,293893
0,4	0,475528	0,475531	0,475528	0,475531	0,475528
0,6	0,475528	0,475528	0,475528	0,475528	0,475528
0,8	0,293893	0,293883	0,293893	0,293883	0,293893
1	0	0,030290	0,003167	-0,000090	$2,1 \cdot 10^{-8}$

Отметим, что во всех расчетных случаях ранг матрицы конечной системы (13) оказывался на единицу меньше порядка системы, т.е. каждому собственному значению призмы соответствует с точностью до постоянного множителя единственная собственная форма колебаний.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Проиллюстрируем возможности анализа нестационарных процессов в прямоугольной призме на примере следующей задачи:

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}(1, y, t) = K_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t; \frac{1}{2G} \sigma_{xy}(1, y, t) = \frac{1}{2G} \sigma_{yy}(x, \eta, t) = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}(x, \eta, t) = 0, \quad (16)$$

Положим также, что отсутствуют объемные силы, и в начальный момент времени призма находится в состоянии покоя: $\vec{u}_0 = 0; \vec{v}_0 = 0; \vec{F} = 0$. Тогда $\vec{\sigma}_x^* = \frac{\omega K_0}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}, \vec{\sigma}_y^* = 0$ и по формуле (8) можно найти $\vec{U}_\sigma = ((1 - \nu)x\vec{i} - \nu y\vec{j}) \cdot \frac{\omega K_0}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$.

Опуская промежуточные вычисления, запишем найденное представление для вектора смещений:

$$\vec{U} = K_0 ((1 - \nu)x\vec{i} - \nu y\vec{j}) e^{-AT} \sin \Omega T + K_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\iint_D ((1 - \nu)x\vec{i} - \nu y\vec{j}) \vec{U}_m dx dy}{\iint_D (\vec{U}_m)^2 dx dy} \vec{U}(x, y) f_m(T), \quad (17)$$

где $T = \frac{\pi c_2}{2h} t$ - безразмерное время; $\Omega = \frac{2h\omega}{\pi c_2}$ - безразмерная частота колебаний; $A = \frac{2h\alpha}{\pi c_2}$;

$$f_m(T) = \frac{A\Omega\Omega_m^2 \cos \Omega T + (\Omega_m^2(\Omega^2 - A^2) - (A^2 + \Omega^2)^2) \sin \Omega T}{(A^2 + \Omega^2)^2 + \Omega_m^2(2A^2 - 2\Omega^2 + \Omega_m^2)} e^{-AT} + \frac{\Omega_m(A^2 + \Omega^2 - \Omega_m^2) \sin \Omega T - 2\Omega A \Omega_m^2 \cos \Omega T}{(A^2 + \Omega^2)^2 + \Omega_m^2(2A^2 - 2\Omega^2 + \Omega_m^2)}.$$

Для оценки влияния коэффициента затухания A на нестационарные колебания призмы рассмотрим численный пример. При нагрузке вида (16) полагаем значения параметров следующими: $\eta = 1; \nu = 0,17$. Рассчитанные для данного случая значения первых собственных частот Ω_m представлены в таблице 2. Отметим, что первая, седьмая и восемнадцатая собственные формы совпадают с модами Ламе и допускают элементарное представление.

Таблица 2 – Собственные частоты призмы для численного примера

m	Ω_m	m	Ω_m
1	$\sqrt{2}=1,414213\dots$	11	5,125023
2	1,550006	12	5,493796
3	1,701971	13	5,884476
4	2,668599	14	6,030617
5	3,192239	15	6,550588
6	3,970183	16	6,876247
7	$3\sqrt{2}=4,242640\dots$	17	7,034632
8	4,743816	18	$5\sqrt{2}=7,071067\dots$
9	4,793296	19	7,604074
10	4,972369	20	7,905052

Вычисления смещений и напряжений проведены с удержанием двадцати слагаемых в ряде (17). Значение K_0 полагалось равным единице, значение безразмерной частоты $\Omega = 0,5$.

Характер зависимости компонентов вектора смещений от времени и коэффициента затухания иллюстрирует рис. 2, где представлены значения U_x (сплошные линии) и U_y (штриховые линии) в точке $M(0,5; 0,5)$.

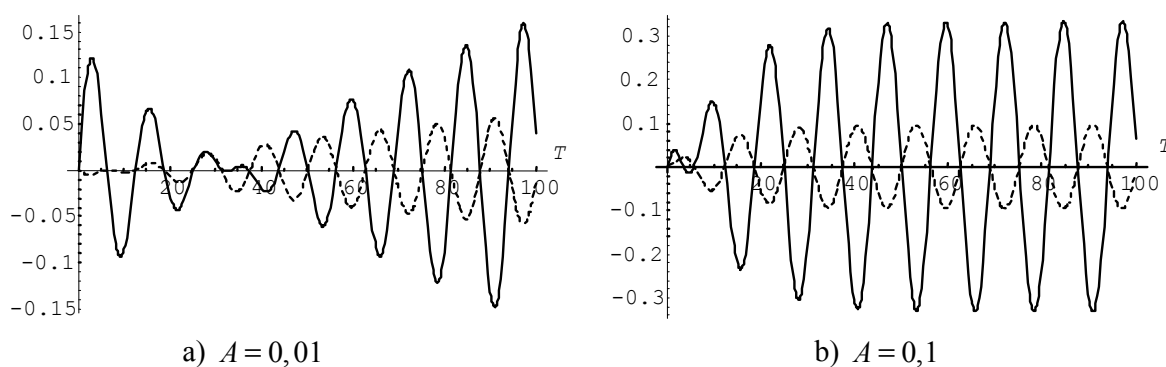


Рис. 2 – Зависимость компонентов вектора смещений от времени

Из рис. 2 видно, что со временем процесс стабилизируется и становится гармоническим. Очевидна взаимосвязь между коэффициентом затухания A и колебаниями призмы – чем больше коэффициент затухания, тем быстрее процесс становится стационарным.

ВЫВОДЫ

Результаты численных исследований показывают, что наблюдается быстрая сходимость ряда по собственным формам. При этом начальные и граничные условия выполняются с высокой точностью. Данные факты демонстрируют эффективность предлагаемого подхода к анализу нестационарных процессов в прямоугольной призме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Гринченко В.Т., Комисарова Г.Л. Нестационарное деформирование цилиндра конечной длины // Прикладная механика. – 1985. – т.21, №8. – С.3-10.
3. Папков С.О., Чехов В.Н. О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доповіді НАН України. - 2004 - №10 - С.57-62.