ОСОБЕННОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПЬЕЗОИЗЛУЧАТЕЛЕЙ ИЗ ПОРИСТОЙ КЕРАМИКИ

А. В. НАСЕДКИН

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.,
Ростовский государственный университет
пр. Стачки, 200/1, 344090, Ростов-на-Дону, Россия
тел. (863) 297-52-30; e-mail: nasedkin@math.rsu.ru

Theoretical aspects of the effective moduli method for an inhomogeneous piezoelectric media were examined. Four static piezoelectric problems for a representative volume that allow finding the effective moduli of an inhomogeneous body were specified. These problems differ by the boundary conditions which were set on a representative volume surfaces. Respective equations for calculation of effective moduli of piezoelectric media with arbitrary anisotropy were derived. Based on these equations and using finite element method (FEM) the full set of effective moduli for PZT porous ceramics having wide porosity range was calculated. Different models of representative volume were considered: piezoelectric cubes with one cubic and one spherical pore inside, cubic volume evenly divided on partial cubic volumes a part of which randomly declared as pores etc. For accounting of inhomogeneous or incomplete ceramics polarization the preliminary modeling of polarization process was performed. The results of FEM modeling were compared with the experimental results for different porous ceramics in the relative porosity range of 0-70 %. Based on these results the modeling of high intensity focusing transducers made of “hard” porous PZT ceramics was performed.

ВВЕДЕНИЕ

Пористые пьезокерамические материалы в последние годы привлекают все большее внимание для использования в ультразвуковых пьезопреобразователях. Основным преимуществом пористых пьезокомпозитов по сравнению с обычной плотной пьезокерамикой являются их низкий акустический импеданс и высокая эффективность по ряду параметров. В большом числе практических применений пористые пьезокерамические материалы могут рассматриваться как однородные с эффективными модулями. Для расчета эффективных модулей пористых пьезокомпозитов различного типа связности был разработан ряд методов ([1, 2] и др.) Ниже развивается подход [3], основанный на методах эффективных модулей, моделировании представительных объемов и применении конечно-элементных технологий. Найденные эффективные модули в могут быть дальнейшем применены для расчета пьезоизлучателей из пористой пьезокерамики с эффективными модулями.

1 НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДА ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ

Пусть Ω – область, занимаемая неоднородным телом с пьезоэлектрическими свойствами; $\Gamma = \partial\Omega$ – граница тела; $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – вектор внешней единичной нормали к Γ;

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор-функция перемещений; $\varphi(\mathbf{x})$ – функция электрического потенциала. Всюду далее через $\boldsymbol{\varepsilon}$ будем обозначать тензор деформаций; через $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор механических напряжений; через $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, а через $\mathbf{D}$ – вектор электрической индукции. Поля $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{E}$ выражаются через $\mathbf{u}$ и φ следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^*)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{1}$$

На границе Γ будем рассматривать также вектор механических напряжений $\mathbf{p} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ и поверхностную плотность электрических зарядов $q = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}$. Как обычно, осредненные по объему характеристики будем обозначать в угловых скобках:

$$\langle(...)\rangle = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega (...)\, d\Omega. \tag{2}$$

В соответствие с четырьмя основными эквивалентными формами определяющих соотношений введем в рассмотрение модули пьезокерамической среды $\mathbf{c}^E$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\epsilon}^S$ и т.д.:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^*\cdot\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^S\cdot\mathbf{E}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^E\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^*\cdot\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{d}\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}^T\cdot\mathbf{E}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^D\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{h}^*\cdot\mathbf{D}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{h}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}^S\cdot\mathbf{D}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^D\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}^*\cdot\mathbf{D}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{g}\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}^T\cdot\mathbf{D}. \tag{6}$$

Для неоднородного тела модули будут функциями координат $\mathbf{x}$: $\mathbf{c}^E = \mathbf{c}^E(\mathbf{x})$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\epsilon}^S = \boldsymbol{\epsilon}^S(\mathbf{x})$ и т.п.

Считая, что Ω — представительный объем неоднородного пьезоэлектрического материала, можно определить эффективные модули $\mathbf{c}^{Eeff}$, $\mathbf{e}^{eff}$, $\boldsymbol{\epsilon}^{Seff}$ по описываемой ниже методике [3–5]. Рассмотрим следующую статическую задачу электроупругости для представительного объема Ω:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{7}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \varphi = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma = \partial\Omega. \tag{8}$$

Задачу (1), (3), (7), (8) назовем $u\varphi$–задачей, а ее решение обозначим через $\mathbf{u}^{u\varphi}$, $\varphi^{u\varphi}$. По найденному решению из (1), (3) определяются $\boldsymbol{\varepsilon}^{u\varphi}$, $\mathbf{E}^{u\varphi}$, $\boldsymbol{\sigma}^{u\varphi}$ и $\mathbf{D}^{u\varphi}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}^{u\varphi} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{u\varphi})$ и т.д. В силу линейности $u\varphi$–задачи (7), (8) существуют тензорные функции $\mathbf{A}^{u\varphi}$, $\mathbf{B}^{u\varphi}$, $\mathbf{F}^{u\varphi}$ и $\mathbf{G}^{u\varphi}$, используя которые, можно связать $\boldsymbol{\varepsilon}^{u\varphi}$ и $\mathbf{E}^{u\varphi}$ с $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и $\mathbf{E}_0$ из (8):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{u\varphi} = \mathbf{A}^{u\varphi}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{B}^{u\varphi}\cdot\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E}^{u\varphi} = \mathbf{F}^{u\varphi}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{G}^{u\varphi}\cdot\mathbf{E}_0. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (3), получим формулы связи $\boldsymbol{\sigma}^{u\varphi}$, $\mathbf{D}^{u\varphi}$ с $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и $\mathbf{E}_0$. Отметим [5], что для $u\varphi$–задачи $\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{u\varphi}\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ и $\langle\mathbf{E}^{u\varphi}\rangle = \mathbf{E}_0$.

Поставим в соответствие исходной неоднородной среде некоторую эквивалентную однородную среду с эффективными модулями $\mathbf{c}^{Eeff}$, $\mathbf{e}^{eff}$ и $\boldsymbol{\epsilon}^{Seff}$. Определяющие соотношения для эквивалентной среды в форме, аналогичной (3), будут иметь вид:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{c}^{Eeff}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{e}^{eff*}\cdot\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{D}_0 = \mathbf{e}^{eff}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}^{Seff}\cdot\mathbf{E}_0. \tag{10}$$

Условиями для нахождения входящих в (10) эффективных модулей для $u\varphi$–задачи логично принять следующие равенства:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{u\varphi} \rangle = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \langle \mathbf{D}^{u\varphi} \rangle = \mathbf{D}_0. \tag{11}$$

Модули, найденные из этих условий, будем помечать верхними индексами "$u\varphi$". Из (10), (11) и формул связи $\boldsymbol{\sigma}^{u\varphi}$, $\mathbf{D}^{u\varphi}$ с $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\mathbf{E}_0$ получаем выражения для $u\varphi$–модулей:

$$\mathbf{c}^{Eeff,u\varphi} = \langle \mathbf{c}^E \cdot\cdot \mathbf{A}^{u\varphi} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{F}^{u\varphi} \rangle, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{Seff,u\varphi} = \langle \mathbf{e} \cdot\cdot \mathbf{B}^{u\varphi} + \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{G}^{u\varphi} \rangle, \tag{12}$$

$$\mathbf{e}^{Eeff,u\varphi} = \langle \mathbf{e} \cdot\cdot \mathbf{A}^{u\varphi} + \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{F}^{u\varphi} \rangle = -\langle (\mathbf{c}^E \cdot\cdot \mathbf{B}^{u\varphi} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{G}^{u\varphi})^* \rangle. \tag{13}$$

Данный вариант метода эквивалентных модулей для электроупругих сред следует [3,4]. Однако, для электроупругих сред можно предложить и другие способы введения эффективных модулей, рассматривая задачи с иными механическими и электрическими граничными условиями. Именно, можно рассматривать следующие задачи [5]:

– $p\varphi$–задача с граничными условиями для вектора механических напряжений $\mathbf{p}$ и электрического потенциала φ $\quad \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$;

– uq–задача с граничными условиями для перемещений $\mathbf{u}$ и поверхностной плотности электрического заряда q $\quad \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad q = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$;

– pq–задача с граничными условиями для вектора механических напряжений $\mathbf{p}$ и поверхностной плотности электрического заряда q $\quad \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0, \quad q = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$.

Во всех этих задачах рассматриваются полевые уравнения равновесия и электростатики (7). При этом в $p\varphi$-задаче используются определяющие соотношения (4) и первоначально находятся эффективные модули $\mathbf{s}^{Eeff,p\varphi}$, $\mathbf{d}^{eff,p\varphi}$ и $\boldsymbol{\epsilon}^{Teff,p\varphi}$; соответственно, в uq-задаче — определяющие соотношения (5) и модули $\mathbf{c}^{Deff,uq}$, $\mathbf{h}^{eff,uq}$ и $\boldsymbol{\beta}^{Seff,uq}$; а в pq-задаче — определяющие соотношения (6) и модули $\mathbf{s}^{Deff,pq}$, $\mathbf{g}^{eff,pq}$ и $\boldsymbol{\beta}^{Teff,pq}$. В любой из этих задач по найденным первоначально эффективным модулям можно в дальнейшем определить и все остальные модули, входящие в определяющие соотношения (3)–(6), записанные для "эквивалентной" среды. Естественно, что полученные в результате из различных задач эффективные модули будут, вообще говоря, отличаться друг от друга, т.е., например, $\mathbf{c}^{Eeff,u\varphi} \neq \mathbf{c}^{Eeff,p\varphi} \neq \mathbf{c}^{Eeff,pq} \neq \mathbf{c}^{Eeff,uq}$ и т.п.

Основной проблемой при реализации методов эффективных модулей является решение соответствующих краевых задач электроупругости и нахождение тензорных функций, таких как $\mathbf{A}^{u\varphi}$, $\mathbf{B}^{u\varphi}$, $\mathbf{F}^{u\varphi}$, $\mathbf{G}^{u\varphi}$ для $u\varphi$-задач. Для практики однако определять эти тензорные функции не требуется. Можно показать, что для пьезокерамики, однородно поляризованной вдоль оси x_3, для каждого типа задач достаточно рассматривать по пять специальных задач. Так для $u\varphi$-задачи (7), (8) имеем следующие задачи и расчетные формулы для модулей в тензорных и двухиндексных обозначениях:

I–$u\varphi$) $\quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0\, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1,\ \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{1j}^{Eeff,u\varphi} = \langle \sigma_{1j}^{u\varphi} \rangle / \varepsilon_0,\ j = 1,2,3, \quad e_{31}^{eff,u\varphi} = \langle D_3^{u\varphi} \rangle / \varepsilon_0$;

II–$u\varphi$) $\quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0\, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,\ \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{j3}^{Eeff,u\varphi} = \langle \sigma_{jj}^{u\varphi} \rangle / \varepsilon_0,\ j = 1,2,3, \quad e_{33}^{eff,u\varphi} = \langle D_3^{u\varphi} \rangle / \varepsilon_0$;

III–$u\varphi$) $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2),\ \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{44}^{Eeff,u\varphi} = \langle \sigma_{33}^{u\varphi} \rangle / (2\varepsilon_0), \quad e_{15}^{eff,u\varphi} = \langle D_2^{u\varphi} \rangle / (2\varepsilon_0)$;

IV–$u\varphi$) $\quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0\, \mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad e_{15}^{eff,u\varphi} = -\langle \sigma_{13}^{u\varphi} \rangle / E_0, \quad \epsilon_{11}^{Seff,u\varphi} = \langle D_1^{u\varphi} \rangle / E_0$;

V–$u\varphi$) $\quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0\, \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad e_{3j}^{eff,u\varphi} = -\langle \sigma_{jj}^{u\varphi} \rangle / E_0,\ j = 1,2,3,\ \epsilon_{33}^{Seff,u\varphi} = \langle D_3^{u\varphi} \rangle / E_0$.

Аналогичные формулы несложно получить и для $p\varphi$, uq и pq–задач. Использование тех или иных определяющих соотношений из четырех типов задач может оказаться полезным при нахождении эффективных модулей для неоднородных структур, совершающих колебания канонического типа, например, для пьезокерамических стержней, пластин, дисков с пьезожесткими и пьезомягкими модами и др.

2 МОДЕЛИ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ И НЕОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Приведенные формулы расчета эффективных модулей предполагают решение соответствующих краевых задач электроупругости в областях Ω, которые должны являться представительными объемами пористых пьезокомпозитов. В качестве представительных объемов в идеале следует брать области, достаточно большие по сравнению с размерами неоднородностей (т.е. пор), но малые по сравнению с расстояниями, на которых существенно меняются осредняемые величины. Тем не менее, в качестве первого приближения можно взять область Ω в форме куба с кубической порой. Данную модель будем именовать моделью 1. Для анализа влияния угловых точек на результаты можно рассмотреть также модель без угловых точек, как например, сферический объем со сферической порой. Данную модель будем называть моделью 2.

Более адекватной наблюдаемой на практике структуре пористого материала при небольшом проценте пористости представляется модель 3 пьезокерамического куба, равномерно разбитого на меньшие кубики, часть из которых случайным образом объявляется порами. Отметим, что подобная модель рассматривалась в [3].

Естественно, что даже в простейшем случае моделей 1 и 2 решения краевых задач электроупругости (7), (8) или им подобных аналитическими методами сопряжено с колоссальными трудностями, а для модели 3 эти краевые задачи могут быть решены только численно. В соответствии с современными стандартами для численного решения задач электроупругости для представительных объемов неоднородной среды наиболее эффективным является метод конечных элементов.

Можно исследовать и более сложные модели 3 с учетом частичной поляризации керамики в окрестности пор [6]. Здесь на первом этапе моделируется процесс частичной поляризации пористой керамики в направлении оси z. Для этого вначале решается задача квазиэлектростатики для неоднородного диэлектрика Ω:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0,\ \mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0,\ \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{14}$$

$$\varphi = V_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}; \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q, \tag{15}$$

где $\Gamma = \Gamma_{\varphi 1} \cup \Gamma_{\varphi 2} \cup \Gamma_q$, $\Gamma_{\varphi 1}$, $\Gamma_{\varphi 2}$ – электроды $z = L$ и $z = 0$ соответственно, $V_1 = -E_p L$, $V_2 = 0$, E_p – некоторое значение для поля поляризации.

Неоднородность диэлектрика можно задать следующим образом. При определенном проценте пористости p вычисляется число n_p кубических конечных элементов, являющихся порами для модели 3. Далее случайным образом n_p элементам из макрокуба присваиваются материальные свойства с диэлектрической проницаемостью вакуума ε_0. С использованием конечных элементов электростатики с различными материальными свойствами решается задача (14), (15). Затем анализируются вычисленные средние значения поля E_{zm} для каждого конечного элемента, не являющегося порой. Элементам присваивается признак поляризованности, если $E_{zm} > E_c$, где $E_c = k_c E_p$, $k_c \leq 1$ – некоторая задаваемая величина.

Можно также ввести гипотезу о “сверхполяризации"отдельных элементов, для которых поле поляризации E_{zm} превосходит некоторое значение $E_{zm} > E_s$, где $E_s = k_s E_p$, $k_s \geq 1$ – задаваемая величина для значения поля “сверхполяризации". Для “сверхполяризованнных” элементов задается еще множитель m_s, с использованием которого модули пьезокерамики рассчитываются по формулам: $c^{E,s}_{\alpha\beta} = (c^E_{\alpha\beta} - c^I_{\alpha\beta})m_s + c^I_{\alpha\beta}$, $e^s_{i\alpha} = e_{i\alpha}m_s$, $\epsilon^{Ss}_{ij} = (\epsilon^S_{ij} - \epsilon^I_{ij})m_s + \epsilon^I_{ij}$, где $c^I_{\alpha\beta}$, ϵ^I_{ij} — модули неполяризованной керамики.

На втором этапе моделирования конечные элементы электростатики модифицируются в элементы с возможностями пьезоэлектрического анализа. Новым элементам присваиваются материальные свойства четырех типов: поляризованной пьезокерамики для поляризованных элементов; пренебрежимо малые пьезоэлектрические модули для пор; изотропного упругого диэлектрика для неполяризованной керамики; сверхполяризованной пьезокерамики. Далее для определения эффективных модулей решается задача электроупругости для представительного объема по методам предыдущего раздела.

Для обеспечения полностью закрытой 3–0 пористости можно усложнить модель 3, используя частично управляемую структуру пористости. Например, элементарный составной куб можно подразделить на пьезоэлектрический каркас и кубик еще меньшего размера. Последний может быть как порой, так и средой с теми же пьезоэлектрическими свойствами, что и каркас. По заданной пористости часть маленьких кубиков случайным образом объявляются порами. В результате будет получена новая модель 4 с полностью закрытой пористостью типа 3–0.

Для моделирования связности 3–3 были разработаны две дополнительной модели. Модель 5, условно называемая моделью 3–0 - 3–3 связности, является развитием модели 4. В ней помимо больших кубиков в каркасе порами могут быть также тонкие параллелепипеды. Модель 6 3–3 связности строится следующим образом. В качестве объема рассматривается куб, полученный транслированием вдоль трех направлений ячеек одинаковой структуры. Ячейки, в свою очередь, также представляют собой куб, размера 10x10x10 состоящий из кубических элементов. В ячейке всегда присутствует связный каркас с элементами в вершинах куба. Каркас состоит из параллелепипеда, представленного своими ребрами (линейные размеры указываются датчиком случайных чисел), а также из цепочек элементов, соединяющих его вершины с вершинами основной ячейки. Соединительные цепочки элементов также генерируются случайно. Каркас занимает 10 % от общего объема ячейки. Таким образом, максимально возможная пористость, которая может быть достигнута в данной модели, составляет 90 %.

3 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для моделей 1 и 2 были проведены конечно-элементные расчеты эффективных модулей для пористых материалов ПКР-8 для всех четырех типов задач: $u\varphi$, $p\varphi$, uq и pq. Обнаружено, что влияние механических граничных условий на эффективные характеристики более сильное, чем влияние электрических условий. Модели $u\varphi$ и uq, в которых задаются условия закрепления, оказываются более жесткими, чем модели $p\varphi$ и pq, в которых заданы механические напряжения. Диэлектрические проницаемости в моделях $u\varphi$ и uq оказываются меньше, чем соответствующие значения для моделей $p\varphi$ и pq. Модели $u\varphi$ и uq дают завышенные величины упругих модулей жесткости, скоростей акустических волн и коэффициентов электромеханической связи. Наоборот, пьезомодули d_{33} и d_{31} оказываются большими для моделей $p\varphi$ и pq. Диэлектрическая проницаемость ϵ^T_{33} в наименьшей степени зависит от типа задачи.

Сравнение компьютерных и экспериментальных результатов [7] для различной пористости показывает, что $p\varphi$-задача позволяет несколько лучше определить скорости акустических волн, модули жесткости и пьезомодули $e_{i\alpha}$, чем $u\varphi$-задача. Отметим, что во всех случаях пьезомодуль d_{31} с ростом пористости убывает не так быстро, как в эксперименте. Между тем, задача $u\varphi$ наиболее удобна для вычислений по методу конечных элементов, особенно для моделей со сложными границами.

Из результатов для моделей 1 и 2 следует, что угловые точки вносят не слишком большие искажения в интегральные характеристики пористой пьезокерамики. В модели 3 при однородной поляризации керамики почти не уменьшается пьезомодуль d_{31}. Уменьшения пьезомодуля d_{31} можно достичь, используя модели частичной поляризации, однако тогда уменьшается как пьезомодуль d_{31}, так и пьезомодуль d_{33}. Недостатком модели 3 является и то, что в ней не поддерживается связность керамического каркаса, как в более сложных моделях 4–6, разработанных С.В. Бобровым. Результаты для этих моделей оказываются лучше, чем для модели 3. При этом для модели 3–3 связности наблюдается очень хорошее соответствие с экспериментом значений пьезомодуля d_{33} в широком диапазоне пористости. Компьютерные вычисления пьезомодуля d_{31} пористой керамики хуже соответствуют вычисленным из экспериментов, чем для пьезомодуля d_{33}. Однако, и здесь лучшее соответствие наблюдается для модели 6 3–3 связности.

Таким образом, можно заключить, что модель представительного объема 3–3 связности дает лучшие результаты по сравнению с другими моделями, а также хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (03-07-90411, 04-01-96803, 05-01-00752), программы “Университеты России” и гранта по поддежке ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wersing W., Lubitz K., Moliaupt J.* Dielectric, elastic and piezoelectric properties of porous PZT ceramics // Ferroelectrics.– 1986.– **68**.– P. 77–97.

2. *Dunn H., Taya M.* Electromechanical properties of porous piezoelectric ceramics // J. Am. Ceram. Soc.– 1993.– **76**.– P. 1697–1706.

3. *Getman I., Lopatin S.* Theoretical and experimental investigation of the porous PZT ceramics // Ferroelectrics.– 1996.– **186**.– P. 301–304.

4. *Хорошун Л. Н., Маслов Б. П., Лещенко П. В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов.– К.: Наук. Думка, 1989.– 347 с.

5. *Наседкин А. В.* О некоторых способах определения эффективных характеристик неоднородных пьезоматериалов // Совр. пробл. мех. спл. среды. Тр. VII Межд. конф., Ростов н/Д, 22-24 окт. 2001. – Т. 1.– Ростов н/Д: ЦВВР, 2002.– С. 182–188.

6. *Наседкин А. В., Рыбянец А. Н.* Моделирование структуры представительных объемов пористых пьезокомпозитов и расчет их эффективных характеристик // Изв. вузов. Сев. - Кавк. регион. Техн. науки.– 2004.– Спецвыпуск.– С. 91–95.

7. *Данцигер А. Я., Разумовская О. Н., Резниченко Л. А. и др.* Многокомпонентные системы сегнетоэлектрических сложных оксидов: физика, кристаллохимия, технология. Аспекты дизайна пьезоэлектрических материалов.– Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 2002. – Т. 2.– 365 с.