

ДИСПЕРСИОННЫЕ, КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ СЕКТОРНОГО СЕЧЕНИЯ С ВАРЬИРУЕМОЙ УГЛОВОЙ МЕРОЙ ВЫРЕЗА

Моисеенко И.А.

Донецкий национальный университет, доцент кафедры теории упругости и вычислительной математики, заместитель декана математического факультета, 83055, г. Донецк – 55, ул. Университетская – 24, ДонНУ, математический факультет, кв. р.т. (факс) (062) 305-46-28, mia@matfak.dongu.donetsk.ua

Троян Р.Р.

Донецкий национальный университет, аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики, 83055, г. Донецк – 55, ул. Университетская – 24, ДонНУ, математический факультет, р.т. (факс) (062) 305-46-28, renata@matfak.dongu.donetsk.ua

The analytical forms of the dispersion equations for sets of normal elastic waves in transverse-isotropic cylindrical waveguide of circular cross-section with sector cut of an any angular measure are constructed. The boundary surfaces of a cut are covered with flexible not extensible membranes and the cylindrical site of a lateral surface is supposed to be of rigid fixation. The branches of running normal waves spectrum with different types of displacements symmetry in section and different circumferential wave numbers are received on the basis of numerical researches dispersion equations. Some main effects in spectrum structure are determined at a variation of a sector cut corner. Also distribution of elastic vibrations amplitude of cross-sectional points and distribution of densities of average power flow in waves of different modes were figured and analyzed.

Анализ возможностей и механизмов варьирования закономерностями распространения ультразвуковых нормальных волн в твердотельных волноводах определенного геометрического класса относится к ряду актуальных и преимущественно открытых проблем волновой механики деформируемых сред [1-7]. Различные аспекты анализа указанного класса задач заключаются в поиске возможностей получения необходимых заданных дисперсионных зависимостей, обеспечении существования заданного количества мод бегущих волн в определенном частотном диапазоне, изменении частот запираания волн, получении вариантов волновых движений с необходимой формой распределения потоков мощности по поперечному сечению. В частности, указанное варьирование для упругих цилиндрических волноводов может быть осуществлено путем трансформации формы сечения кругового цилиндра – создания в сечении секторного выреза определенной угловой меры. В этой связи в настоящей работе рассматриваются методика численно-аналитического решения задачи о распространении нормальных упругих волн вдоль трансверсально изотропного цилиндра кругового сечения с секторным вырезом (рис.1) и некоторые результаты численного анализа ведущих характеристик таких волновых процессов. Полагается, что рассматриваемый

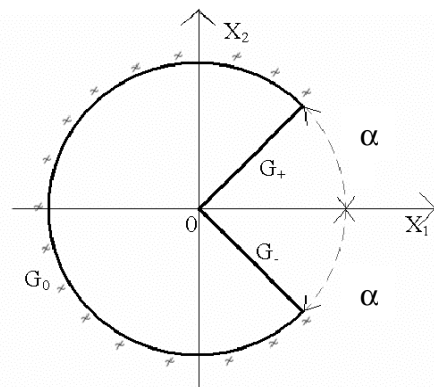


Рис.1

протяженный, цилиндрический волновод с сечением в виде кругового сектора и закрепленной внешней круговой границей занимает в безразмерной системе цилиндрических координат (r, θ, z) $V = \{ 0 \leq r \leq R, \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha, -\infty < z < \infty \}$. Составной контур $G = G_0 \cup G_+ \cup G_-$ поперечного сечения волновода образован суперпозицией участков $G_0 = \{ r = R, \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha \}$, $G_+ = \{ 0 \leq r \leq R, \theta = \alpha \}$, $G_- = \{ 0 \leq r \leq R, \theta = -\alpha \}$. На граничные участки секторного выреза G_+ и G_- нанесено абсолютно гибкое нерастяжимое микропанцирное покрытие. Данные краевые условия выражаются соотношениями

$$(\tilde{u}_r)_{G_0} = (\tilde{u}_\theta)_{G_0} = (\tilde{u}_z)_{G_0} = 0, \quad (\tilde{u}_r)_{G_\pm} = (\tilde{u}_z)_{G_\pm} = (\tilde{\sigma}_{\theta\theta})_{G_\pm} = 0, \quad (1)$$

в которых $\{\tilde{u}_\alpha\} (\alpha = r, \theta, z)$ - безразмерные компоненты вектор-функции $\vec{u} = \vec{u}_0(r, \theta)e^{-i(\omega t - \tilde{k}z)}$ напряженности гармонической нормальной волны, $\{\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}\} (\alpha\beta = rr, r\theta, rz, \theta\theta, \theta z)$ - безразмерные комплексные функции упругих напряжений в нормальных волнах.

Исследуемые нормальные волны могут быть условно подразделены на симметричные, то есть удовлетворяющие условиям $u_{0r}(r, -\theta) = u_{0r}(r, \theta)$, $u_{0\theta}(r, -\theta) = -u_{0\theta}(r, \theta)$, $u_{0z}(r, -\theta) = u_{0z}(r, \theta)$ и на антисимметричные, удовлетворяющие свойству $u_{0r}(r, -\theta) = -u_{0r}(r, \theta)$, $u_{0\theta}(r, -\theta) = u_{0\theta}(r, \theta)$, $u_{0z}(r, -\theta) = -u_{0z}(r, \theta)$. Дисперсионные уравнения для семейств нормальных симметричных волн получены с использованием точных решений уравнений динамики трансверсально изотропной среды, записываемых в форме

$$u_r = \sum_{(n)} \sum_{j=1}^3 A_{nj}^+ G_{nrj}^+(r) \cos(v_n^+ \theta), \quad u_\theta = \sum_{(n)} \sum_{j=1}^3 A_{nj}^+ G_{n\theta j}^+(r) \sin(v_n^+ \theta), \quad u_z = \sum_{(n)} \sum_{j=1}^3 A_{nj}^+ G_{nzj}^+(r) \cos(v_n^+ \theta), \quad (2)$$

обеспечивающей точное удовлетворение граничным условиям (1) на поверхностях секторного выреза с покрытиями. В представлениях (2)

$$G_{nrj}^+(r) = \chi_j^{(1)} \left(\frac{v_n^+}{r} J_{v_n^+}(\gamma_j r) - \gamma_j J_{v_n^++1}(\gamma_j r) \right) \quad (j = \overline{1, 2}), \quad G_{nr3}^+(r) = \frac{v_n^+}{r} J_{v_n^+}(\gamma_3 r),$$

$$G_{n\theta j}^+(r) = -\chi_j^{(1)} \frac{v_n^+}{r} J_{v_n^+}(\gamma_j r) \quad (j = \overline{1, 2}), \quad G_{n\theta 3}^+(r) = -\frac{v_n^+}{r} J_{v_n^+}(\gamma_3 r) + \gamma_3 J_{v_n^++1}(\gamma_3 r),$$

$$G_{nzj}^+(r) = \chi_j^{(3)} J_{v_n^+}(\gamma_j r) \quad (j = \overline{1, 2}), \quad G_{nz3}^+(r) = 0,$$

$$v_n^+ = (2n + 1)\pi / 2\alpha,$$

γ_j^2 ($j = \overline{1, 2}$) - корни биквадратного алгебраического уравнения

$$\Delta_1 \gamma^4 + \Delta_2 \gamma^2 + \Delta_3 = 0, \quad \Delta_1 = c_{11} c_{44}, \quad \Delta_2 = (\beta_1 c_{44} + \beta_2 c_{11} + k^2 (c_{13} + c_{44})^2), \quad \Delta_3 = \beta_1 \beta_2;$$

$$\gamma_3^2 = 2\beta_1 (c_{11} - c_{12})^{-1}, \quad \beta_1 = \Omega^2 - c_{44} k^2, \quad \beta_2 = \Omega^2 - c_{33} k^2,$$

$$\chi_j^{(1)} = \beta_2 - c_{44} \gamma_j^2, \quad \chi_j^{(2)} = ik(c_{13} + c_{44}) \gamma_j^2.$$

В вышеприведенных соотношениях $c_{ij} = \tilde{c}_{ij} c_*^{-1}$, $u_\alpha = \tilde{u}_\alpha R_*^{-1}$, $\sigma_{\alpha\beta} = \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} c_*^{-1}$, k - безразмерное волновое число $k = \tilde{k} R_*$, $\Omega = \omega R_* (\rho / c_*)^{1/2}$ - приведенный безразмерный частотный параметр волны, ρ - плотность материала волновода, R_* , c_* - соответственно нормирующие параметры для величин с размерностями напряжений и упругих перемещений.

Аналогичные представления для комплексных амплитудных функций напряженности в антисимметричных нормальных волнах имеют вид

$$u_r = \sum_{(n)} \sum_{j=1}^3 A_{nj}^- G_{nrj}^-(r) \sin(v_n^- \theta), \quad u_\theta = \sum_{(n)} \sum_{j=1}^3 A_{nj}^- G_{n\theta j}^-(r) \cos(v_n^- \theta), \quad u_z = \sum_{(n)} \sum_{j=1}^3 A_{nj}^- G_{nzj}^-(r) \sin(v_n^- \theta), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{nrj}^-(r) &= \chi_j^{(1)} \left(\frac{v_n^-}{r} J_{v_n^-}(\gamma_j r) - \gamma_j J_{v_n^-+1}(\gamma_j r) \right) \quad (j = \overline{1,2}), & G_{nr3}^-(r) &= -\frac{v_n^-}{r} J_{v_n^-}(\gamma_3 r), \\
 G_{n\theta j}^-(r) &= \chi_j^{(1)} \frac{v_n^-}{r} J_{v_n^-}(\gamma_j r) \quad (j = \overline{1,2}), & G_{n\theta 3}^-(r) &= -\frac{v_n^-}{r} J_{v_n^-}(\gamma_3 r) + \gamma_3 J_{v_n^-+1}(\gamma_3 r), \\
 G_{nzj}^-(r) &= \chi_j^{(3)} J_{v_n^-}(\gamma_j r) \quad (j = \overline{1,2}), & G_{nz3}^- &= 0, \\
 v_n^- &= n\pi / \alpha.
 \end{aligned}$$

Свойство ортогональности систем функций $\{\cos(v_n^\pm \theta)\}$, $\{\sin(v_n^\pm \theta)\}$ на интервале $\theta \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ позволяет на базе представлений (2), (3) получить из граничного условия на G_0 серию дисперсионных уравнений для семейств нормальных волн с «окружными волновыми числами» v_n^\pm для симметричных и антисимметричных волн:

$$\Delta_n^\pm(\Omega, k) = \begin{vmatrix} G_{nr1}^\pm(1) & G_{nr2}^\pm(1) & G_{nr3}^\pm(1) \\ G_{n\theta 1}^\pm(1) & G_{n\theta 2}^\pm(1) & G_{n\theta 3}^\pm(1) \\ G_{nz1}^\pm(1) & G_{nz2}^\pm(1) & G_{nz3}^\pm(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Численный анализ ветвей действительных и мнимых корней дисперсионных уравнений (2) проведен для волноводов из керамики PZT – 4 с физико-механическими характеристиками $c_{11}=13.9$, $c_{12}=7.78$, $c_{13}=7.43$, $c_{33}=11.5$, $c_4=2.56$, $c_*=10^{10}$ н/м², имеющих секторные вырезы с различной угловой мерой α , в диапазоне изменения приведенных параметров $\text{Re}k \in [0, 12]$, $\text{Im}k \in [0, 6]$, $\Omega \in [0, 20]$.

Рассчитанные диаграммы дисперсионных кривых для спектральных семейств бегущих нормальных волн симметричного (S) типа с $n=0$ приведены для волновода с $\alpha=45^\circ$ на рисунке 2, а для S-волн с $n=1$ на рисунке 3. Аналогичные распределения дисперсионных кривых для волновода с секторным вырезом меры $\alpha=91^\circ$ приведены на рисунках 4, 5 и для волновода с $\alpha=135^\circ$ - на рисунках 6, 7.

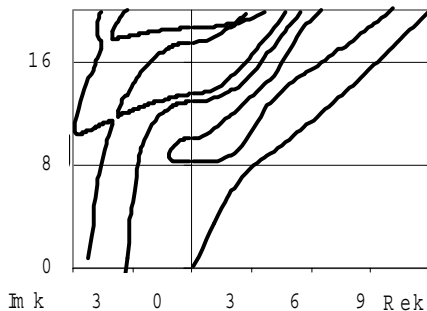


Рис. 2

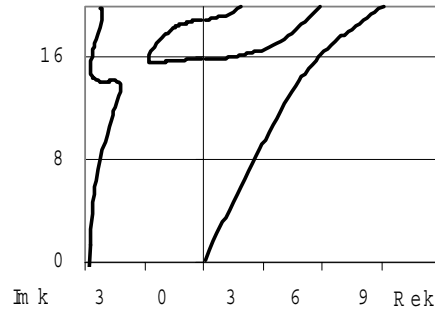


Рис. 3

Анализ диаграмм показывает, что в спектрах волн для всех рассматриваемых значений n при $\alpha \leq 90^\circ$ (рисунки 2, 3) имеются моды с нулевой частотой запертия, которые исчезают в спектральных семействах рассматриваемого типа, когда вырез приобретает минимальную внешнюю угловую меру $\alpha > 90^\circ$. Характер указанной качественной трансформации отражают рисунки 4 – 7. С увеличением угловой меры выреза при $\alpha > 45^\circ$ на

дисперсионной кривой нижней моды с ненулевой частотой запертия из семейства (S) $n=0$ возникает участок, соответствующий обратной волне. Нижние ненулевые частоты запертия волн рассматриваемых семейств с ростом α убывают, и указанное убывание является гораздо более медленным в сравнении с уменьшением площади сечения волновода. Еще одним примечательным эффектом в структуре спектров, является, в частности, появление моды бегущей волны с нулевой частотой запертия в семействе (S) $n=1$ для волновода с $\alpha=135^\circ$.

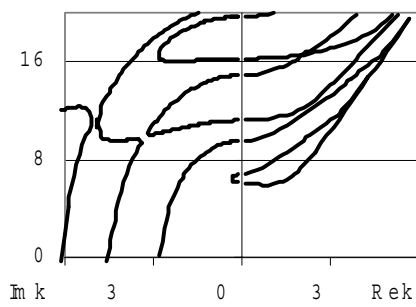


Рис. 4

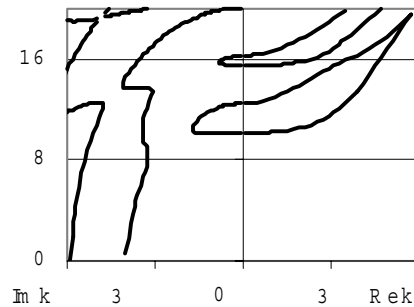


Рис. 5

Из анализа ветвей корней дисперсионного уравнения, отвечающих спектральным множествам краевых стоячих нормальных волн, можно констатировать, что при варьировании углового параметра секторного выреза спектр краевых волн в основном представлен мнимыми ветвями, что соответствует случаю, когда комплексные участки спектра имеют вид характерных «связок» между мнимыми ветвями, существующих в узких частотных диапазонах.

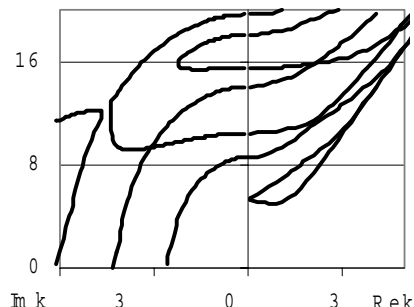


Рис. 6

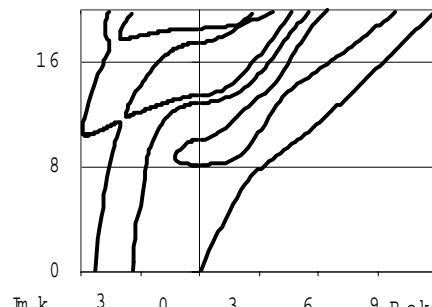


Рис. 7

Рисунки 8-13 характеризуют кинематику и энергетику исследуемых нормальных волновых движений.

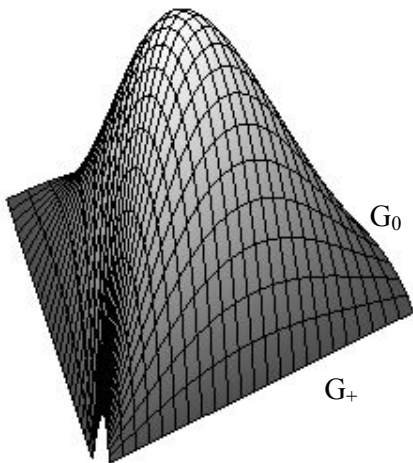


Рис.8

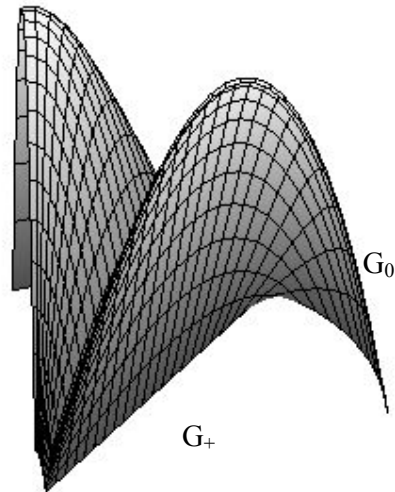


Рис.9

На рисунках 8-10 соответственно представлены нормированные амплитудные формы волновых перемещений u_r , u_θ и u_z в сечении цилиндра с секторным вырезом угловой меры $\alpha=3\pi/4$ для волны с $n=1$, $k=3.1$, $\Omega=7.9$ (волны первой моды дисперсионного спектра). Рисунок 11 иллюстрирует отличия в форме распределения амплитудных значений u_r для волны второй моды этого же спектра, имеющей параметры $k=3.1$, $\Omega=10.8$. Следует отметить, что в качественном отношении для волны первой моды преобладающими являются амплитуды перемещений u_θ , а для волны второй моды – амплитуды волновых перемещений u_z .

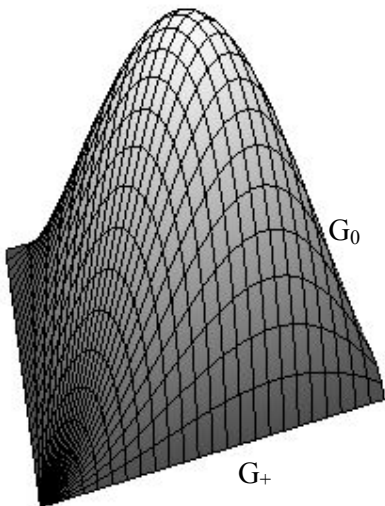


Рис. 10

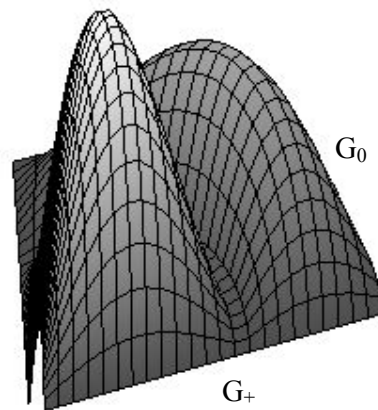


Рис.11

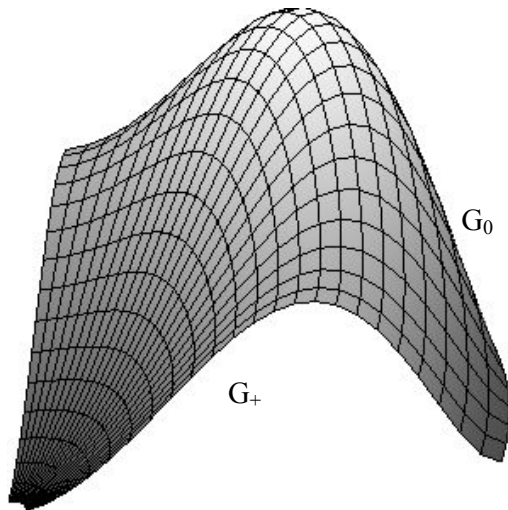


Рис.12

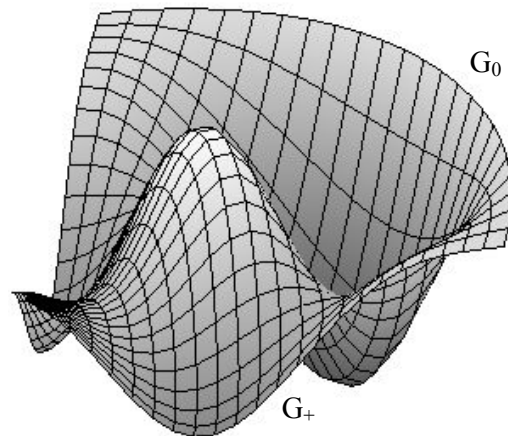


Рис.13

На рисунках 11 и 12 приведены распределения в областях сечений средних за период потоков мощности для обоих вышеуказанных волновых движений. При этом распределение на рисунке 12 указывает на наличие циркуляции энергетических потоков в нормальной волне второй моды.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Влайков Г.Г., Григоренко А.Я., Шевченко С.Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением – К.: НАН Украины, Ин-т механики им. С.П. Тимошенко, Техн. Центр, 2001. – 147 с.
2. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Анализ частотного спектра и форм колебаний длинных цилиндров//Прикл. механика.-1980.-16, №1, С. 3-7.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах – К.: Наук.думка, 1981. – 283 с.
4. Комиссарова Г.Л. Дисперсия осесимметричных нормальных волн в упругом жесткозашемленном цилиндре//Доклады АН УССР.-Сер. А.-1981.-№9. С. 39-43.
5. Речицкий В.И. Акустоэлектронные радиокомпоненты. Схемы, топология, конструкции. – М.: Радио и связь, 1987. – 192 с.
6. Gsell D., Leutenegger T, Dual J. Modeling three-dimensional elastic wave propagation in circular cylindrical structures using a finite-difference approach// Journ. of the Acous. Soc. of America. - 2004. – V. 116, N 6. – P. 3237-3797.
7. Shulga N.A. Propagation of Harmonic Waves in Anisotropic Piezo-Electric Cylinders. Waveguides with Complicated Properties// Int. Appl. Mech. - 2002. – 38, №12. – P. 1440 – 1463.