

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АКУСТИКИ

ПЕТР В. ЛУКЬЯНОВ,

Институт гидромеханики НАН Украины, т.453-26-60

A new numerically analytical method has been concerned for the nonlinear problems. A detailed scheme of the method using is offered to the reader for Helmholtz and Karman - Guderley equations. One explains the peculiarities of a new method.

ВСТУПЛЕНИЕ

При решении ряда задач математической физики очень часто приходится иметь дело с ограниченными областями с криволинейной границей. Кроме того, возникают ситуации, когда изучаемый физический процесс описывается нелинейным уравнением в частных производных. И в первом и во втором случае аналитическое решение задачи найти практически невозможно. Следовательно, для решения подобного рода задач используются различные численные методы. К числу последних можно отнести и численно-аналитический метод, предлагаемый в данной работе для решения задач акустики.

По своей структуре метод является многошаговым сеточным, поскольку в расчетной схеме используется значения в предыдущих точках для продвижения численной процедуры по сетке. Он предназначен для решения задачи Дирихле в ограниченной области с криволинейной границей для дифференциальных уравнений n – го порядка. При этом, если акцентировать внимание на дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка, следует отметить, что ведущее уравнение (governing equation) может быть как линейным, так и нелинейным и любого типа: гиперболическое эллиптическое или параболическое.

Применение его рассмотрено на задачах для линейного уравнения Гельмгольца (задачи классической акустики) и нелинейного уравнения Кармана-Гудерлея, описывающего аэродинамическое зарождение звука тонким крылом в трансзвуковом потоке.

Для линейных уравнений на основе предлагаемого метода получаются аналитическое выражение для расчета потенциала течения, которое с заранее заданной точностью позволяет решить задачу. В случае нелинейного уравнения метод является многошаговым численным. Однако, в виду структуры метода, во многих случаях полученная расчетная система уравнений может быть решена без выполнения дополнительных итерационных приближений, о чем будет подробнее сказано в описании метода.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Пусть есть некоторая ограниченная область D m - мерного пространства R^m . В двумерном случае $D \subset R^2$. На этом множестве задана функция $f=f(x,y)$, удовлетворяющая нелинейному оператору

$$Nf = 0, \quad (1)$$

а также граничному условию

$$f_{\Gamma} = u. \quad (2)$$

Если рассматривается нестационарная задача, то граничное условие (2) зависит от времени. В начальный момент при $t = 0$ граничное условие автоматически становится начальным.

В большинстве задач гидромеханики, акустики приходится иметь дело с уравнениями в частных производных второго порядка. Поэтому, хотя схема справедлива и для уравнения (1) n -го порядка, остановимся на уравнении 2-го порядка

$$Nf = a_0 f + a_1 f_x + a_2 f_y + a_3 f_{xx} + a_4 f_{xy} + a_5 f_{yy} = 0, \quad (3)$$

рассматривая стационарную задачу. Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ в общем случае не только функции координат, а для нелинейных слагаемых могут содержать как непосредственно функцию f , так и ее производные. Последний случай в качестве примера рассматривается в данной работе на конкретной задаче.

Уравнение (3) с граничным условием (2) (условие Дирихле) составляют стационарную граничную задачу. В данном примере постановка стационарная, упрощенная. Если необходимо решать нестационарную задачу, то согласно идее метода, время может быть введено как равноправная дополнительная координата.

Идея метода. Произвольную гладкую функцию от двух переменных $f \in C^2(A)$ можно представить в точке $P = (x_p, y_p) \in A$ виде многомерного ряда Тейлора:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \\ + \frac{1}{2!} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + R_o(P), \quad (4)$$

где $R_o(P)$ остаточный член ряда.

В выражении (4) присутствуют неизвестная функция $f(x_0, y_0)$ и ее производные до второго порядка. Это представление согласно существующей классификации при малом шаге сетки приближает функцию $f(x, y)$ в точке (x, y) с точностью до величин второго порядка малости. В выражении (4) присутствуют шесть неизвестных величин, для определения которых необходимо шесть независимых условий (уравнений). *Так вот идея метода состоит в том, что пять из шести уравнений - это выражение значений функции $f(x, y)$ на границе (или вблизи нее) в виде ряда (4) в пяти точках (x_i, y_i) , $i=1,5$. Шестое условие является оригинальным и состоит в том, что искомая функция насильно удовлетворяется оператору (1) в текущей расчетной точке (x_0, y_0) . Мы фактически заставляем ее подчиняться уравнению (1), описывающему изучаемый физический процесс.* Таким образом, имеем замкнутую систему алгебраических уравнений. Если оператор (1) линейный, то и система уравнений будет системой линейных алгебраических уравнений. Если же оператор (1) нелинейный, то и система из шести уравнений будет также нелинейная. Однако, используя известную схему метода Гаусса, например, можно свести решение нелинейной системы уравнений к решению одного нелинейного уравнения, в котором входящие неизвестные системы выражены через остальные компоненты искомого решения. Приведенное представление (4) является согласно существующей классификации аппроксимацией второго порядка точности. Данная идея проверена на тестовой задаче для двумерного оператора Гельмгольца.

1. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Осуществим проверку идеи метода на уравнении Гельмгольца для двумерного прямоугольника $D = [0; a] \times [0; b]$. Итак, пусть $f(x, y)$ в области D удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta f + k^2 f = 0, \quad (5)$$

а на границе следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = 0, x = 0, f_x(x, y) = 0, x = a; \\ -f_y(x, y) = V_0, y = 0, -f_y(x, y) = 0, y = b \end{aligned} \quad (6)$$

Решение задачи (5)-(6) получается аналитически достаточно просто и имеет вид

$$f(x, y) = -\frac{V_0}{k} (\operatorname{ctg} kb \cos ky + \sin ky) V_0, y = 0. \quad (7)$$

и не зависит от x (т.к. V_0 постоянна).

Теперь решим задачу согласно предлагаемому методу. Поскольку нам известно, что решение зависит от одной переменной, представим для простоты его в виде

$$f(y) = f(y_0) + f_y(y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} f_{yy}(y_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{3!} f_{yyy}(y_0)(y - y_0)^3 + o((y - y_0)^3) \quad (8)$$

Как видно из представления (8), мы имеем дело с четырех точечной схемой: нам необходимо три начальных значения функции $f(y)$ и удовлетворение уравнения (5) в четвертой точке y_0 . В результате выполнения данных четырех условий получаем систему линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными

$f(y_0), f_y(y_0), f_{yy}(y_0), f_{yyy}(y_0)$. Компоненты расширенной матрицы A следующие:

$$\begin{aligned} a_{11} = 1, a_{12} = -3\Delta, a_{13} = 4.5\Delta^2, a_{14} = -4.5\Delta^3, a_{21} = 1, a_{22} = -2\Delta, a_{23} = 2\Delta^2, a_{24} = -\frac{4}{3}\Delta^3, a_{31} = 1, \\ a_{32} = -\Delta, a_{33} = 0.5\Delta^2, a_{34} = -\frac{1}{6}\Delta^3, a_{41} = k^2, a_{42} = 0, a_{43} = 1, a_{44} = 0, b_1 = f(0), b_2 = f(\Delta), \\ b_3 = f(2\Delta), b_4 = 0, \end{aligned}$$

где Δ - постоянный шаг по y . Решение этой системы в рекуррентной форме запишется

$$x_3 = \frac{(-0.5f(0) + 2f(\Delta) - 2.5f(2\Delta)) \cdot k^2}{0.5\Delta^2 k^2 + 1}, \quad (9)$$

$$x_4 = \frac{(2f(0) - 3f(\Delta) - 3\Delta^2 x_3) \cdot k^2 - x_3}{-5\Delta^3 k^2}, \quad (10)$$

$$x_2 = -\frac{f(0) - f(\Delta) - 2.5x_3\Delta^2 + \frac{19}{6}\Delta^3 x_4}{\Delta}, \quad (11)$$

$$x_1 = f(0) + 3\Delta \cdot x_2 - 4.5\Delta^2 \cdot x_3 + 4.5\Delta^3 \cdot x_4, \quad (12)$$

Результаты численного расчета показали хорошую точность реализации метода при различных значениях волновых чисел k . На рис.1 и рис.2 в качестве примера приведены данные расчета колебательной скорости и звукового потенциала (в размерной форме) соответственно при $k = 4$ и $k = 8$. Сплошная линия отображает аналитическое решение на основе метода разделения переменных, пунктирная – расчет согласно данному методу. Результаты расчета на ЭВМ показали, что количественное отличие наблюдается, начинается с третьего (а то и четвертого) знака после запятой. Это как раз и подтверждает тот факт, что мы пренебрегли малыми величинами третьего и ниже порядков. Некоторые иные особенности данного метода иллюстрирует следующая задача.

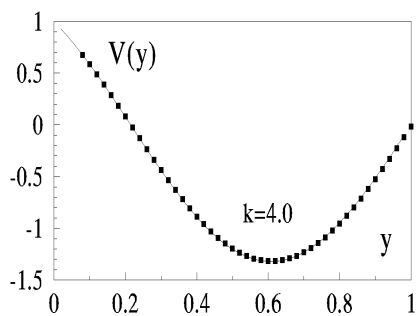
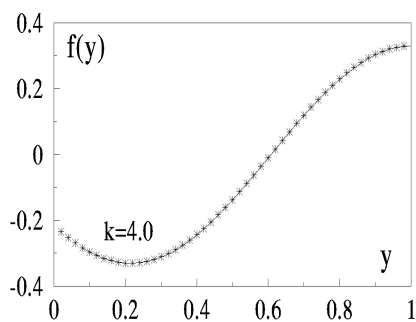


Рис.1

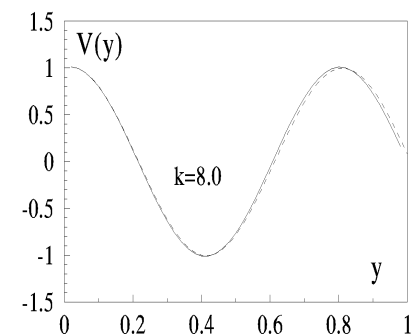
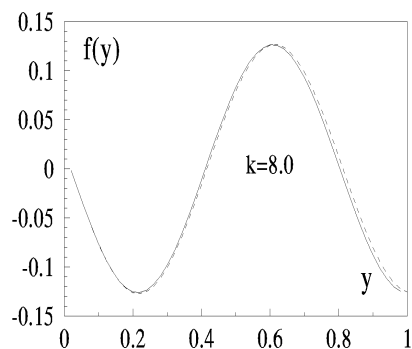


Рис.2

2. ОБТЕКАНИЕ ЛОПАСТИ ВЕРТОЛЕТА ПЛОСКИМ ТРАНСЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Данная задача уже решена, поэтому она представляет интерес как тестовая для проверки работы предлагаемого метода в сравнении с решениями других авторов.

Рассмотрим плоское сечение тонкого симметричного крыла рис.3. Считаем, что набегающий на крыло поток сжимаемой жидкости (газа) однородный ($U = U_\infty$) стационарный, а поле течения потенциальное. Тонкая вихревая пелена, сходящая с крыла, в рассмотрение в данном случае не принимается. Уравнение, описывающее распространение малых возмущений в плоском стационарном трансзвуковом потоке (а это зарождение звука), есть уравнение Кармана-Гудерлея:

$$\left[1 - \frac{1}{M_1^2} + \varepsilon(\gamma + 1)f_\xi(\xi, \eta)\right]f_{\xi\xi}(\xi, \eta) - \frac{\lambda^2}{M_1^2}f_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0, \quad (13)$$

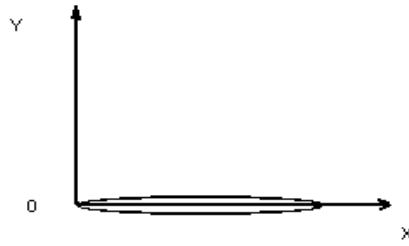


Рис.3

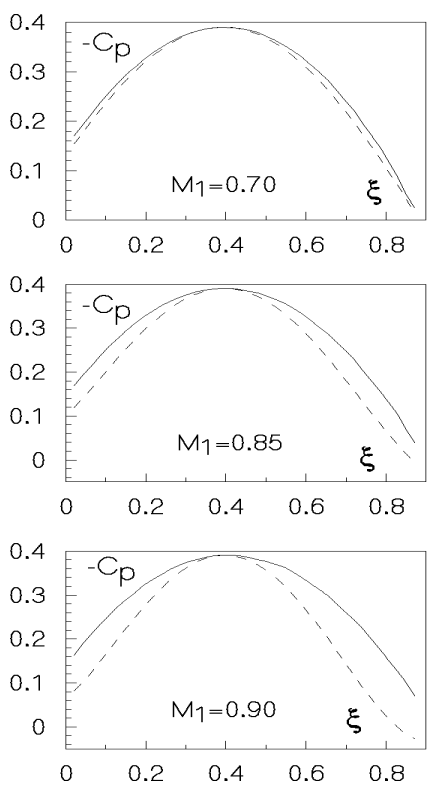


Рис.4

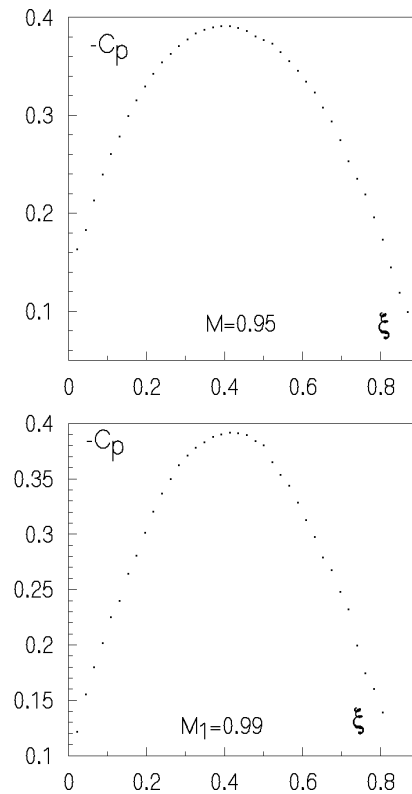


Рис.5

где $f(\xi, \eta) = \varepsilon^{-1} \phi'(x, y)$, M_1 - безразмерный потенциал малых возмущений плоского течения и число Маха соответственно, $\phi'(x, y)$ - размерный потенциал малых возмущений. Как видно из уравнения (13), f - функция двух безразмерных координат $\xi = x$ и $\eta = \lambda y$. Величина $\gamma = 1.4$ для рассматриваемого течения, а ε, λ - малые параметры, характеризующие соответственно порядок возмущения потенциала течения и размер крыла по вертикали (см. рис.3). Последние величины, как правило, уточняются в процессе решения задачи, поскольку связаны с безразмерной величиной δ . Величина δ является постоянной для каждого крыла и представляет собой отношение толщины крыла к его хорде.

Набегающий поток до взаимодействия с крылом невозмущенный, т.е. $f = 0, \xi < 0$. Для симметричного крыла относительно прямой $\eta = 0$ достаточно рассмотреть верхнюю полуплоскость $\eta \geq 0$. На верхней кромке крыла, задаваемой функцией $g(\xi)$, ставится граничное условие:

$$0 < \xi < 1; f_\eta = \delta g_\xi. \quad (14)$$

Заметим, что в классической постановке задачи граничное условие (14) сносится с верхней кромки на прямую $\eta = 0$. Это необходимо для решения задачи, например, методом годографа. Однако для применения рассматриваемого в данной работе метода в этом ограничении нет надобности.

Важной характеристикой течения над крылом является коэффициент давления:

$$C_p = 2\delta^{\frac{2}{3}}(\gamma + 1)^{\frac{-1}{3}} f_\xi. \quad (15)$$

Данные вычисления коэффициента давления C_p ($\delta = 0.06$ и $g(x) = x(1-x)$) для различных значений M_1 приведены на рис.4 и рис.5 сплошной линией. Для сравнения пунктиром изображены значения C_p , полученные на основе линеаризованного уравнения (13). Полученные значения C_p достаточно близко совпадают результатами работ [3,4].

Как показали расчеты, метод является достаточно эффективным при сравнительно небольшом количестве разбиений по сетке и требует меньшее количество вычислений чем конечно-разностные схемы. Это объясняется тем фактом, что он является многошаговым и позволяет, не измельчая слишком шаг (в приведенных графических данных : $\Delta = 0.025 - 0.02$), получать необходимую точность.

1. *Karman, T. von.* The similarity law of transonic flow. // Journal of Math. And Physics. - 1947.-V.26.-p.No.3.182-190.
2. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир,1980.-280с.
3. *Caradonna F.X, Isom M.P.* Subsonic and Transonic Potential Flow over Helicopter Rotor Blades //AIAA Journal.-1972.-P.No.12.1606-1612.
4. *Soiezky H., Yu N.J., Fung K.-Y., and Seebass A.R.* New Method for Designing Shock-Free Transonic Configurations // AIAA Journal.-1979.-V.17.-P.No.7.722-729.