

ХАОС В ДИНАМИКЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Т. С. КРАСНОПОЛЬСКАЯ

Институт гидромеханики Национальной Академии Наук Украины
e-mail: kras@ihm.kiev.ua

Функционирование многих важных и ответственных элементов различных технических устройств, в том числе и преобразователей, основано на эффекте связанности механического и электрического полей в пьезокерамических средах [1, 6, 7, 11]. Если электроупругое тело нагружено на среду с сопротивлением, как это имеет место при работе излучателей звука в гидроакустике, то излучение энергии вовне вызовет изменение электрического поля в создающем генераторе по сравнению со случаем, когда потерь не происходит. Это изменение может быть существенным и приводить к неожиданным динамическим режимам или являться пренебрежимо малым в зависимости от того, какова мощность задающего генератора по сравнению с излучаемой мощностью. Исследование новых эффектов как в динамике пьезокерамических тел, так и в функционировании задающего генератора, которые обусловлены “чувствительностью” совокупной системы к излучению энергии, представляет несомненный научный интерес. Это случай, так называемого, ограниченного или неидеального возбуждения пьезокерамических тел генератором ограниченной мощности, т.е. мощности, сравнимой с мощностью, излучаемой или потребляемой телами при их деформациях. Статья посвящена анализу эффектов взаимодействия, коллективно названных эффектом Зоммерфельда - Кононенко [2–4, 8–10, 12, 13], колебаний пьезокерамического излучателя и механизма возбуждения этих колебаний - генератора электрического тока, имеющего ограниченную мощность. С этой целью строится новая математическая модель, описывающая процесс взаимодействия пьезокерамического излучателя, нагруженного на гидросреду с сопротивлением, и генератора. Связанность процессов в преобразователе и источнике энергии - генераторе приводит к таким качественно новым эффектам в их динамике, которые нельзя выявить, исследуя задачу в постановке идеального возбуждения. Речь идет, прежде всего, о возможности утановления хаотических режимов, выйти из которых без дополнительного внешнего воздействия невозможно.

В качестве модельной задачи рассматривается стержневой пьезокерамический преобразователь, к электродам которого прикладывается электрическое напряжение, возбуждаемое LC - генератором (рис.1). Через поверхности S_- и S_+ стержня, которые перпендикулярны его оси oz (с началом координат в срединном сечении), происходит излучение звуковых сигналов в жидкость. Исследовать будем продольные колебания круглого стержня длины $2h$, имеющего площадь сечения S , поляризованного вдоль оси (продольный пьезоэффект). Согласно теории продольных деформаций [1,6,7] уравнения состояния имеют вид

$$\epsilon_z = s_{33}\sigma_z + d_{33}E_z; \quad D_z = \epsilon_{33}E_z + d_{33}\sigma_z \quad (1)$$

где ϵ_z - продольная деформация; σ_z - механическое напряжение; E_z - напряженность электрического поля; D_z - индукция поля; s_{33} - упругая податливость; d_{33} - пьезоэлектрическая постоянная; ϵ_{33} - диэлектрическая проницаемость. Ограничиваясь акустическим диапазоном частот, используем уравнения вынужденной электростатики, которые применительно к рассматриваемой задаче получают форму

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2)$$

где Ψ - электрический потенциал. Уравнения (1)-(2) дополним соотношением Коши $\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$ и уравнением колебаний стержня

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где $u = u(z, t)$ - продольные перемещения стержня, ρ - его плотность. Кроме того, учтем граничные условия при колебаниях стержня в среде с импедансом η_0

$$\sigma_z = -\eta_0 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \Psi = \pm V(t); \quad z = \pm h \quad (4)$$

Здесь $2V(t)$ - разность потенциалов, которая реализуется на электродах, расположенных на поверхностях S_- и S_+ стержня, и является неизвестной функцией времени, зависящей от колебаний стержня и тока генератора. $2V(t)$ является разностью потенциалов в реальной электрической цепи, где ток $i = -\frac{\partial(SD_z)}{\partial t}$ течет по стержню. Ток i преобразователя со стержнем связан с током генератора $i_2 + i_3$ согласно дифференциальному уравнению

$$2V + L \frac{di}{dt} = M \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} \quad (5)$$

Ламповый генератор является классическим примером автоколебательной системы [5]. Запишем уравнения Киргофа для каждой ветви тока генератора [3, 4]. Прежде всего предположим, что генератор работает в мягком режиме, т.е.

$$i_a = I_0 + I_1(e_g + De_a) - I_3(e_g + De_a)^3, \quad (6)$$

здесь i_a - анодный ток, e_g - напряжение на сетке; e_a - напряжение на аноде; D - проницаемость лампы; I_0, I_1, I_3 - постоянные параметры лампы. Уравнения токов генератора имеют вид

$$\begin{aligned} i_a &= i_1 + i_2 + i_3; e_a - E_a + R_a i_1 = 0; \\ e_g + E_g - M_c \frac{di_2}{dt} &= 0; L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 = \frac{1}{C_c} \int i_3 dt; \\ e_a + L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 + L_1 \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (6)-(7) описывает внутренние процессы в ламповом генераторе. Эти уравнения являются нелинейными относительно e_g (обычно D есть малой величиной), поэтому целесообразно оставить в качестве основной переменной e_g . Вводя новую переменную

$$\phi(t) = \int_0^t (e_g - E_g) dt \quad (8)$$

(где $-E_g$ - постоянная составляющая e_g), мы получим следующее нелинейное уравнение относительно ϕ

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi = a_1\frac{d\phi}{dt} + a_2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - a_3\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^3 \quad (9)$$

где

$$a_1 = \frac{M_c}{L_c C_c} \left[I_1 - \frac{R_c R_a C_c - L_c}{R_a (M_c - D L_c)} + \frac{R_c L_1}{R_a^2 M_c} - 3 I_3 (E_g)^2 \right]; a_2 = 3 \frac{M_c I_3 E_g}{L_c C_c}; a_3 = \frac{M_c I_3}{L_c C_c}.$$

Кроме того, $\omega_0^2 = \frac{R_a + R_k}{R_a L_k C_k}$ и ω_0 является частотой генератора в линейной теории.

Если генератор связан с электрической цепью преобразователя, то последнее уравнение системы (7) изменяется на следующее

$$e_a + L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 + L_1 \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} = M \frac{di}{dt} \quad (10)$$

Теперь для внутренних процессов в генераторе должно выполняться уравнение вида

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = a_0 \dot{\phi} + a_2 \dot{\phi}^2 - a_3 \dot{\phi}^3 - a_4 V(t) \quad (11)$$

где $a_0 = a_1 - \frac{M^2 R_c}{L_c C_c L R_a^2}$; $a_4 = \frac{2 M M_c}{L R_a L_c C_c}$. Уравнение (11) связано с соотношением (5). Таким образом, функционирование генератора и создание напряжения $2V(t)$ описываются не уравнением (9), а системой уравнений четвертого порядка (11) и (5), где величина i зависит от механических деформаций, происходящих в пьезокерамическом стержне.

Для этих деформаций и электрического поля имеем систему уравнений вида

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{d_{33}(1-k^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (12)$$

где $c = [\rho s_{33}(1-k^2)]^{-1/2}$ скорость продольных сопряженных волн в стержне; $k = d_{33}(\epsilon_{33}s_{33})^{-1/2}$. Представим продольные колебания стержня в виде суммы по собственным модам колебаний, а именно [1, 7, 11]

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i z \quad (13)$$

здесь λ_i есть корень уравнения $\lambda_i h \cos \lambda_i h - k^2 \sin \lambda_i h = 0$. Для напряжения Ψ в этом случае мы будем иметь [1, 7, 11]

$$\Psi(z, t) = f(t)z + \frac{k^2}{d_{33}(1-k^2)} \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i z \quad (14)$$

Ток i , протекающий через стержень при этом равен

$$i = -\frac{\partial(SD_z)}{\partial t} = S\epsilon_{33}(1-k^2)\dot{f} = S\epsilon_{33}\frac{(1-k^2)}{h} \left[\dot{V} - \frac{k^2}{d_{33}(1-k^2)} \sum_{i=1}^N \dot{f}_i \sin \lambda_i h \right] \quad (15)$$

Используя граничные условия (4), получаем следующие соотношения для собственных мод колебаний

$$-\frac{s_{33}h\eta_0}{d_{33}} \sum_{i=1}^N \dot{f}_i(t) \sin \lambda_i h = V(t) \quad (16)$$

и

$$i = \frac{S\epsilon_{33}(1-k^2)}{h}\dot{V}(t) + \frac{\epsilon_{33}k^2}{h^2\eta_0}V(t) \quad (17)$$

Подставляя эти выражения в (5), находим что напряжение $2V(t)$, прикладываемое на электроды преобразователя должно быть определено как решение системы уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \omega_0^2\phi &= a_1\dot{\phi} + a_2\dot{\phi}^2 - a_3\dot{\phi}^3 - a_4V(t); \\ \ddot{V}(t) + \omega_1^2V(t) &= a_5\phi + a_6\dot{\phi} - a_7\dot{V}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\omega_1^2 = \frac{2h}{LS\epsilon_{33}(1-k^2)}; a_5 = -\frac{M\omega_1^2 R_k(R_a + R_k)}{2M_k R_a L_k}; a_6 = -\frac{M\omega_1^2 R_k}{2M_k R_a}; a_7 = \frac{k^2}{\eta_0 h S(1-k^2)}.$$

Если пренебречь обратным влиянием колебаний преобразователя (механических и электрических) на функционирование генератора ($a_4 = 0$), другими словами, если пренебречь эффектом Зоммерфельда - Кононенко, система уравнений (18) распадается на два уравнения. Одно из них является автоколебательным, а второе линейным уравнением, описывающим колебательные процессы в стержне. В этом случае $\phi(t)$ и $V(t)$ всегда будут регулярными функциями времени. И функционирование генератора и излучение волн преобразователем в акустическую среду будут описываться регулярными функциями и соответствовать регулярным (возможно достаточно сложным) процессам. Если же $a_4 \neq 0$, не только регулярные, но и хаотические режимы возможны в системе (18). Они возможны, поскольку система (18) является нелинейной системой размерности четыре, а размерность три является наименьшей, начиная с которой возможна хаотизация движений в гладкой (дифференцируемой) нелинейной динамической системе [5].

Для определения возможных установившихся режимов взаимодействия в системе (18) введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\phi\omega_0}{E_g}; \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \zeta; \quad \beta = \frac{V}{E_g}; \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \gamma; \quad \tau = \omega_0 t \quad (19)$$

Тогда система уравнений (18) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta; & \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 - \alpha_4\beta; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma; & \frac{d\gamma}{d\tau} &= -\alpha_0\beta + \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_7\gamma; \end{aligned} \quad (20)$$

где коэффициенты равны [9]

$$\alpha_0 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}; \quad \alpha_1 = a_0/\omega_0; \quad \alpha_2 = a_2 E_g/\omega_0;$$

$$\alpha_3 = a_3 E_g^2/\omega_0; \quad \alpha_4 = a_4/\omega_0; \quad \alpha_5 = a_5/\omega_0^3; \quad \alpha_6 = a_6/\omega_0^2; \quad \alpha_7 = a_7/\omega_0$$

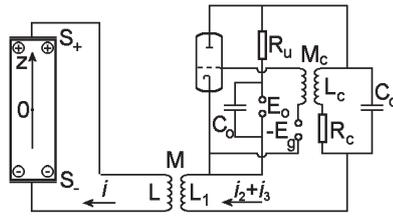


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы

Поскольку система уравнений (21) является нелинейной дифференциальной системой, допускающей в общем случае только численное решение, проведем численный эксперимент. Мы полагаем, что генератор работает, имея следующие параметры [9]

$$\begin{aligned}
 E_c &= 700V; E_a = 2000V; I_1 = 6.5 \times 10^{-5} A/V; I_3 = 5.184 \times X \times 10^{-9} A/V^3 \\
 D &= 0.015; R_a = 160\Omega; R_c = 10\Omega; L_c = 0.094H; \\
 C_c &= 1.0465mmF; M_c = 0.275H; M = 1H; L = 100H,
 \end{aligned} \tag{21}$$

здесь X является безразмерным переменным бифуркационным параметром. В таком случае постоянные коэффициенты системы (21) равны

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= 0.995; \alpha_1 = 0.0535; \alpha_2 = 0.63 \times X; \alpha_3 = 0.21 \times X; \alpha_4 = 0.103; \alpha_5 = -0.0604; \\
 \alpha_6 &= -0.12; \alpha_7 = 0.01; \xi(0) = \zeta(0) = 0.1; \beta(0) = \gamma(0) = 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

Одним из главных критериев существования хаотических режимов в динамической системе является наличие положительных показателей Ляпунова [5], которые характеризуют процесс “разбегания” траекторий в фазовом пространстве по различным направлениям. Хаотические решения обладают свойством локальной неустойчивости, что математически выражается в том, что они имеют положительным хотя бы один максимальный показатель Ляпунова. На рис. 2 показана зависимость максимального показателя Ляпунова λ от значений параметра X . При параметрах, когда максимальный показатель Ляпунова больше нуля, в системе устанавливаются хаотические режимы. Из рисунка очевидно, что в системе имеются три области $4.05 \leq X \leq 5.14$, $7.26 \leq X \leq 9.00$ и $11.9 \leq X \leq 12.5$, где реализуются хаотические установившиеся режимы. Как следует из приведенного графика при $1.00 \leq X < 4.05$, $5.14 \leq X \leq 7.26$, $9.00 < X < 11.9$ и $12.5 \leq X \leq 20.00$ решения системы (18) будут иметь максимальный показатель Ляпунова равный нулю, что свидетельствует о том, что система (18) имеет периодические (квазипериодические) решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. *Электроупругость*. //К.:Наук. думка—1989.277с.
2. Кононенко В. О. *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*. //М.:Наука—1964.256с.

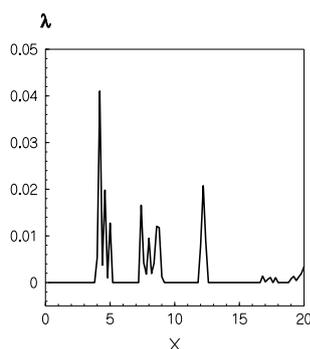


Рис. 2. Зависимость максимального показателя Ляпунова λ_0 от значений параметра X

3. Кононенко В. О, Краснопольская Т. С. *Ламповый генератор в системе возбуждения механических колебаний.* //Вибротехника.—1977. —28, № 4—С.105–120
4. Краснопольская Т. С.*Автономное возбуждение механических колебаний электродинамическим вибратором.* //Прикл. мех. —1977. —13, № 2—С.108 –113
5. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. *Стохастические и хаотические колебания.* //М.:Наука—1987.424с.
6. Улитко А. Ф. *Сопряженные волновые процессы в пьезокерамических телах при электрическом разряде.* //Акустичний вісник—1999.—2, № 1—С.60–73
7. Улитко А. Ф. *Векторное разложение в пространственной теории упругости.* //К.:Академперіодика—2002.342с.
8. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply.* //8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Eds. M. Okrolnick, L. Pust: vol. 1 Prague: Czechoslovak Acad. Sci—1991.—P.181–184
9. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaos in vibrating systems with limited power-supply.* //Chaos—1993. —3—P.387–395
10. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations.* //J. Fluids & Structures—1994.—8—P.1–18
11. Auld B. A. *Acoustic Fields and Waves in Solids.*//New York:Wiley —1973. 837p.
12. Sommerfeld A. *Beitrage zum dynamischen ausbau der festigkeislehre.* //Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure—1902.—46—P.391–394
13. Timoshenko S. *Vibration Problems in Engineering*//New YorkVan Nostrand Co.—1928. 480p.